

**FACULDADE VALE DO CRICARÉ
MESTRADO PROFISSIONAL EM CIÊNCIA, TECNOLOGIA E EDUCAÇÃO**

LEONARDO MARTINS

**ALTURAS INACESSÍVEIS: UMA ANÁLISE HISTÓRICA EM
LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA**

**SÃO MATEUS
2018**

LEONARDO MARTINS

ALTURAS INACESSÍVEIS: UMA ANÁLISE HISTÓRICA EM
LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA

Dissertação apresentada ao Programa de
Mestrado Profissional em Ciência, Tecnologia
e Educação da Faculdade Vale do Cricaré,
como requisito parcial para obtenção do grau
de Mestre.

Orientador: Prof. Dr. Edmar Reis Thiengo

SÃO MATEUS
2018

Autorizada a reprodução e divulgação total ou parcial deste trabalho, por qualquer meio convencional ou eletrônico, para fins de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte.

Catálogo na publicação

Mestrado Profissional em Ciência, Tecnologia e Educação

Faculdade Vale do Cricaré – São Mateus – ES

M386a

Martins, Leonardo.

Alturas inacessíveis: uma análise histórica em livros didáticos de matemática / Leonardo Martins – São Mateus - ES, 2018.

85 f.: il.

Dissertação (Mestrado Profissional em Ciência, Tecnologia e Educação) – Faculdade Vale do Cricaré, São Mateus - ES, 2018.

Orientação: prof. Dr. Edmar Reis Thiengo.

1. Trigonometria no triângulo retângulo. 2. Altura inacessível.
3. Ângulos notáveis. I. Thiengo, Edmar Reis. II. Título.

CDD: 510.07

LEONARDO MARTINS

**ALTURAS INACESSÍVEIS: UMA ANÁLISE HISTÓRICA EM
LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ciência, Tecnologia e Educação da Faculdade Vale do Cricaré (FVC), como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciência, Tecnologia e Educação, na área de concentração Ciência, Tecnologia e Educação.

Aprovado em 15 de junho de 2018.

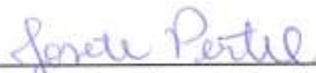
COMISSÃO EXAMINADORA



Prof. Dr. Edmar Reis Thiengo
Faculdade Vale do Cricaré (FVC)
Orientador



Prof. Dr. Marcus Antonius da Costa Nunes
Faculdade Vale do Cricaré (FVC)



Profa. Dra. Josete Pertel
Faculdade Multivix São Mateus

Às minhas Mães Arlene e Eliane, pelo amor incondicional.

Aos meus amigos que o coração chama de irmãos Evanda, Rose e Felipe.

A Mirtis Rosa e Jocemara, amigas, guerreiras.

Ao meu Professor de Matemática Alexandro José Correia Scopel, por ter sido
inspiração decisiva na minha carreira profissional.

Ao José Rodrigues Pereira, pelos conselhos profissionais e pelo incentivo ao estudo.

Aos meus alunos, pela força e compreensão.

À Vovó Laurita (*in memoriam*).

Ao meu amigo e orientador Edmar Reis Thiengo.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por me conceder saúde e a Sabedoria Dele.

Ao Prof. Dr. Edmar Reis Thiengo, pela confiança depositada em minha pessoa, pelas contribuições, paciência e cumplicidade na orientação deste trabalho, das publicações e pela parceria acadêmica.

Aos professores do mestrado da Faculdade Vale do Cricaré “Mestrado em Ciências, Tecnologia e Educação”, que muitos contribuíram para minha formação, em especial, o Prof. Dr. Marcus Nunes. Bem como toda equipe de apoio pedagógico.

À minha mãe (Arlene), à minha segunda mãe (Eliane), ao meu padrasto (José) e ao meu pai (Sebastião), por me incentivarem, apoiarem e me fornecerem todo o suporte necessário nesta jornada.

À minha irmã (Jocilene), que me apoiou, me motivou e suportou minha ausência em todos os sábados. Ao meu sobrinho Davi, por ter entendido que, aos sábados, as nossas brincadeiras somente aconteceriam ao anoitecer, logo após chegar de um dia inteiro de estudos.

Aos meus amigos e colegas de trabalho, pelo apoio, por compreenderem os motivos de ser o último a chegar e o primeiro a sair de suas festas, em especial Roger e Isis.

À Jocemara Sperancini da Vitória, pela amizade incondicional.

A Edmilson, Bruna, Diego, Glauber, Lorenzo, Maria de Fátima, Mirtis, Pablo, Rafael, Tchesco, Piffer, Felipão, Evanda e Rose, que a fé em Deus nos faça eternos amigos.

À Prof^a. Msc. Rita Lélia Guimarães Granha, pela revisão do texto, concebendo um texto coerente, coeso e na norma culta da língua portuguesa.

A todos que, de alguma forma, contribuíram para a conclusão deste trabalho.

Nós não precisamos de nenhuma educação. Nós não precisamos de nenhuma lavagem cerebral. De nenhum humor negro na sala de aula. Professores, deixem as crianças em paz. Ei! Professor! Deixe as crianças em paz! Em suma, é apenas mais um tijolo no muro. Em suma, você é apenas mais um tijolo no muro!

Roger Waters

RESUMO

Mesmo com todo o avanço tecnológico e todas as diversas fontes de informações disponibilizadas, o livro didático permanece como um importante recurso em sala de aula, de fácil acesso para alunos e professores, sendo, assim, o mais usual. Isso tem gerando um aumento significativo nas pesquisas sobre livros didáticos, cada uma com sua peculiaridade. Nessa linha, e para contribuir com essa análise, esta pesquisa pretende responder ao seguinte questionamento: Como os livros didáticos de matemática têm abordado, ao longo da história, as deduções da altura de objetos, cuja base é inacessível? Tem como objetivo geral discutir, historicamente, as deduções da altura de objetos com bases inacessíveis, presentes nos livros didáticos de Matemática e, nos objetivos específicos, apresentar o histórico do livro didático no Brasil; discorrer sobre a trigonometria no triângulo retângulo; ilustrar a proposta da pesquisa; apresentar as deduções propostas para o ensino da trigonometria; e analisar as explicações, exemplos, atividades de livros didáticos desde 1929. Como alicerce teórico, a pesquisa primou em apresentar a evolução histórica dos livros didáticos e, em seguida, discutir o ensino da trigonometria no Brasil. A pesquisa é de caráter documental, realizou análises em livros didáticos e buscou, insistentemente, alcançar os objetivos propostos por meio das análises feitas nas explicações, deduções, exemplos, exercícios e, inclusive, figuras. As análises evidenciaram que nem sempre o conteúdo variações entre ângulos notáveis eram abordados nos livros didáticos. Há uma defasagem de duas décadas, até o início da década de 50, quando, finalmente, essa parte da trigonometria começou a constar nesses livros. As análises apontam que os autores utilizam três métodos em suas obras: a lei geral, o sistema de equações e as propriedades do triângulo. A pesquisa propõe possíveis deduções para determinar a altura de objetos cuja distância até a base é inacessível, por meio da variação de ângulos notáveis. Tais propostas tornam-se um material importante para os professores de Matemática, que poderão utilizá-las para estimular no aluno a aprendizagem desse conteúdo, bem como aproximá-lo de outras situações e/ou padrões matemáticos com esse conteúdo e, assim, aumentar seu rendimento do aluno, entre outros.

Palavras-chave: Trigonometria no triângulo retângulo. Altura inacessível. Ângulos notáveis.

ABSTRACT

Even with all the technological advancement and all the sources of information available, the textbook will become an important resource in the classroom, easily accessible for classes and teachers, and thus the most usual. This has a greater weight in searches on textbooks, each with its peculiarity. In this line, and to contribute to this analysis, this research intends to answer the following question: How did the textbooks of mathematics have approached, throughout history, the deductions of the height of objects, whose base is inaccessible? It has as general objective to discuss, historically, the deductions of the height of objects with inaccessible bases, present in the textbooks of Mathematics and, in the specific objectives, to present the history of the textbook in Brazil; talk about trigonometry in the triangle rectangle; illustrate the research proposal; present the proposed deductions for the teaching of trigonometry; and analyze the explanations, examples, textbook activities since 1929. As a theoretical foundation, the research focused on presenting the historical evolution of textbooks and then discussing the teaching of trigonometry in Brazil. The research is documentary in nature, carried out analysis in didactic books and sought, persistently, to reach the proposed objectives through the analyzes made in the explanations, deductions, examples, exercises and even figures. The analyzes showed that not always the content variations between notable angles were addressed in textbooks. There is a delay of two decades, until the early 1950s, when, finally, this part of trigonometry began to appear in these books. The analyzes indicate that the authors use three methods in their works: the general law, the system of equations and the properties of the triangle. The research proposes possible deductions to determine the height of objects whose distance to the base is inaccessible, through the variation of notable angles. Such proposals become important material for teachers of Mathematics, who can use them to stimulate in the student the learning of this content, as well as to bring it closer to other mathematical situations and/or patterns with this content and, thus, to increase its student achievement, among others.

Keywords: Trigonometry in Triangle Rectangle. Inaccessible height. Remarkable angles.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
1.1	DO PROBLEMA AOS OBJETIVOS	13
1.2	JUSTIFICATIVA DO TEMA.....	13
2	DIFERENTES OLHARES SOBRE LIVRO DIDÁTICO	15
2.1	PROGRAMAS GOVERNAMENTAIS E OS LIVROS DIDÁTICOS	21
3	PERCURSO METODOLÓGICO	30
3.1	INSTRUMENTOS	31
3.2	MATERIAIS E MÉTODOS	34
3.3	RESTRIÇÕES DA PESQUISA	38
4	ANÁLISES DOS DADOS	39
4.1	DEDUÇÃO DOS ÂNGULOS NOTÁVEIS	39
4.2	CÁLCULO DE ALTURA CUJA BASE É INACESSÍVEL	46
4.2.1	Explicação didática pela Lei Geral.....	47
4.2.2	Explicação didática por Sistema de Equações	50
4.2.3	Explicação didática pelas Propriedades do Triângulo	53
5	PRODUTO EDUCACIONAL: PROPOSTAS DE DEDUÇÕES	56
5.1	CONCEITOS INICIAIS E APLICABILIDADE.....	56
5.2	PROPOSTAS DE DEDUÇÕES COM ÂNGULOS NOTÁVEIS.....	57
5.2.1	Dedução com afastamento entre os ângulos de 60° e 45°	58
5.2.2	Dedução com afastamento entre os ângulos de 45° e 30°	59
5.2.3	Dedução com afastamento entre os ângulos de 60° e 30°	58
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	59
	REFERÊNCIAS	62

APÊNDICE A – RELAÇÃO DOS LIVROS PESQUISADOS	67
APÊNDICE B – LIVROS COM VARIAÇÃO ENTRE ÂNGULOS	83

1 INTRODUÇÃO

A Matemática surgiu e foi transformada ao longo do tempo como uma manifestação de cultura, para resolver problemas sociais, objetivando a sobrevivência e o bem-estar dos seres humanos. Bortoli, Marchi e Giongo (2016, p. 31) afirmam que “[...] por meio de leituras sobre a história das diversas civilizações, percebemos a contribuição e influência dos egípcios, gregos, romanos, babilônios, judeus e árabes para o conhecimento [...]” associada a essa disciplina.

Essas contribuições foram materializadas de diversas formas, entre elas os desenhos das paredes, manuscritos, entre outras, sendo o livro didático um componente importante para a divulgação e o ensino da Matemática no decorrer do tempo. Como o governo português julgava desnecessário a imprensa no Brasil, somente em 1808, após três séculos, o país recebeu a primeira tipografia (FOSSA, 2000).

Junto com a criação da Academia Militar do Rio de Janeiro, na Carta de Lei de 1810, foram recomendados explicitamente os nomes dos “[...] autores que deveriam ser utilizados para o Curso de Matemática, entre eles, Legendre, Euler, Lacroix e Francouer [...]” (FOSSA, 2000, p. 112). Regulamentava-se os livros que deveriam ser utilizados no Curso de Matemática, cabendo ao docente a obediência à Carta de Lei.

A Carta de Lei de 1810 destacava que o professor seria incentivado pelos governos para que ele mesmo criasse seus próprios materiais. Porém, os esforços iniciais foram direcionados para tradução dos livros de autores que haviam sido recomendados pela corte.

No século XIX, a disciplina denominada Matemática não havia sido instituída nem em nível primário e nem no ensino secundário; havia nessa época disciplinas isoladas de Trigonometria, Álgebra, Aritmética e Geometria. Fossa (2000), destaca que, nessa época, esses materiais apresentavam pequenas variações nos títulos como tratado, elementos e lições, acrescido da disciplina. O autor assevera que em “[...] 1929, as diferentes subáreas foram unificadas numa única disciplina que levou o nome de Matemática e passou a ser ensinada em todos os anos da escola primária e secundária” (FOSSA, 2000, p. 122).

Nesse sentido, alguns estudiosos brasileiros também contribuíram. Segundo Mendes (2018), Euclides Roxo, professor de Matemática, brasileiro, escreveu diversos livros didáticos dessa disciplina na primeira metade do séc. XX, foi também um grande estudioso e um dos que mais proeminentes na difusão da Matemática, em especial, estudos relacionados a conteúdos de trigonometria.

A trigonometria, um dos ramos mais antigos da Matemática, é relevante devido à sua importância para a compreensão e o estudo de ângulos e da distância. Porém, mesmo sendo uma área relevante para a Matemática, os autores Bortoli, Marchi e Giongo (2016) enfatizam que estudá-la tem se resumido simplesmente a expor suas regras, sem oportunizar aos alunos visualizar como aplicá-la em situações-problemas no dia a dia. Isso resulta em alunos desmotivados e dificuldade de compreender o dinamismo proposto pela Matemática, além de dificultar a construção do processo de ensino-aprendizagem.

No que diz respeito à trigonometria os “[...] livros didáticos utilizados atualmente apresentam uma configuração histórica totalmente desvinculada do desenvolvimento dos aspectos conceituais abordados no mesmo [...]” (MENDES, 2018, p. 7). Nesse sentido é fundamental, conforme a própria autora, utilizar livros paradidáticos de maneira a alcançar uma referência para o processo de ensino-aprendizagem significativo de determinados conteúdos da Matemática. Além disso, é preciso envolver os alunos em diversas situações relacionadas ao estudo da Matemática, visto que o

[...] ato de envolver os alunos com as origens dos saberes, buscando, discutindo, investigando e analisando os contextos em que as ideias matemáticas nasceram e se desenvolveram, e interligar esses saberes com as diferentes matemáticas presentes no contexto sociais em que eles se situam, objetiva proporcionar, mediante sistemas educativos, conhecimentos e habilidades matemáticas, dinamizando os ensinamentos dessa disciplina (BORTOLI; MARCHI; GIONGO, 2016 p. 48).

Desse modo, evidencia-se a responsabilidade dos docentes referente ao processo de ensino-aprendizagem de trigonometria de forma significativa, permitindo, assim, aplicá-la com mais propriedade e expandi-la por meio do envolvimento e interesse por parte dos alunos.

1.1 DO PROBLEMA AOS OBJETIVOS

Desde o início de minha atuação em sala de aula desenvolvi um interesse maior pelos livros didáticos, afinal, eles são, atualmente, instrumentos imprescindíveis tanto para professor quanto para os alunos, sendo, portanto, utilizados em grande escala no processo ensino-aprendizagem. Assim, resolvi fazer uma análise histórica sobre livros didáticos e como determinado conteúdo de Trigonometria foi abordado nesses livros.

Ao longo dos anos, modificações didático-pedagógicas relevantes foram feitas nos livros didáticos¹, pois o conhecimento aprimora e se expande, e o livro didático perde seu valor caso não acompanhe as mudanças dentro dos contextos em que se encontram inseridos. Porém, especificamente na área da Matemática, alguns conteúdos constam nos livros de Matemática desde os primeiros exemplares, como, por exemplo, o conteúdo de trigonometria no triângulo retângulo.

Um dos entraves iniciais ao aplicar Sistemas de Equações às razões trigonométricas ocorre devido à ausência de explicação ou modelo de resolução dessas situações-problemas. Por exemplo: para determinar a altura de um objeto, cuja distância é inacessível, por meio da variação dos ângulos notáveis, é necessário desenvolver, de forma sistemática, uma resolução auxiliada por sistema de equações.

Assim, pela importância de trabalhar esse conteúdo em sala de aula com os alunos, a presente pesquisa visa responder ao seguinte questionamento: como os livros didáticos de matemática vêm abordando, ao longo da história, as deduções da altura de objetos, cuja base é inacessível?

Como objetivo geral, objetiva discutir, historicamente, as deduções da altura de objetos com bases inacessíveis, presentes nos livros didáticos de Matemática.

Somado ao objetivo geral, os objetivos específicos referem-se a:

¹ Nesta pesquisa, as palavras compêndios, livros, livro-texto, material didático significarão livros didáticos.

- Selecionar os livros do acervo que contemplam, ao abordarem o conteúdo de trigonometria, a variação entre ângulos para o cálculo de altura de objetos;
- Identificar as deduções propostas para resolver a altura de objetos cuja base é inacessível, presentes nos livros didáticos de matemática;
- Verificar os períodos em que as deduções pesquisadas foram abordadas nos livros didáticos de matemática;
- Comparar as diferentes formas de deduções em questão, presentes nos livros didáticos de Matemática ao longo da história;
- Propor possíveis deduções para determinar a altura de objetos cuja a distância à base é inacessível, utilizando a variação de ângulos notáveis.

1.2 JUSTIFICATIVA DO TEMA

Os estudos científicos sobre alturas inacessíveis, conteúdo presente em livros didáticos de Matemática, pressupõem que essa linha de pesquisa pode e deve ser mais bem pesquisada, visto que contém uma rica fonte de conhecimento histórico e que quanto mais se compreende suas particularidades, mais há objetos para serem estudados e analisados.

Assim, justifica-se a presente pesquisa pela colaboração que pode proporcionar, particularmente, no campo da História da Matemática e Educação da Matemática. Nesse sentido, pretende-se, por meio de uma abordagem sucinta, apontar as principais discussões sobre livro didático, em especial os de Matemática, que abordam os conteúdos de Trigonometria no Triângulo Retângulo e os relacionados à variação entre ângulos.

As propostas contidas neste estudo podem ser utilizadas facilmente pelos docentes em sala de aula, e visa estimular os alunos a desenvolver inúmeras atividades de forma mais simples e compreensível. Direciona-se também às editoras, pois essas propostas podem ser inseridas em seus livros didáticos, para auxiliar professores e alunos no processo de ensino-aprendizagem.

2 DIFERENTES OLHARES SOBRE LIVRO DIDÁTICO

As alterações nas legislações referentes aos livros, alinhadas ao fácil acesso pelos estudantes, tornaram os livros didáticos um dos mais importantes recursos pedagógicos atualmente. E, mesmo com o avanço tecnológico e as diversas fontes de informações disponibilizadas, o livro didático ainda continua sendo um importante recurso em sala de aula, devido à facilidade de acesso por alunos e professores, o que o torna o recurso pedagógico mais usual.

Essa utilização no processo ensino-aprendizagem proporcionou um aumento e uma expansão significativos no número de pesquisas em livros didáticos. Porém, segundo Choppin (2004), durante muito tempo pesquisas sobre livros didáticos tinham sido negligenciadas e foi somente a partir dos anos 1960 e, principalmente, de 1980 que ocorreu um considerável impulso.

Assim sendo, pesquisas relacionadas a livros didáticos têm se tornado relevantes entre pesquisadores, seja em relação ao levantamento histórico de suas concepções e conceitos generalistas, seja para identificar e compreender o tipo de abordagem de conteúdos da disciplina a que se destina.

No entanto, para Bittencourt (2004), embora esse instrumento tenha sido classificado culturalmente como de menor valor, passou, porém, a ser analisado sob outra ótica, o que permitiu perceber seu aspecto educativo, bem como sua importância na e para a escola. Segundo a autora, o livro é essencial no processo de escolarização, pois:

As relações contraditórias estabelecidas entre livro didático e a sociedade têm instigado investigações variadas, por meio das quais é possível identificar a importância desse instrumento de comunicação, de produção e transmissão de conhecimento, integrante da tradição escolar há, pelo menos, dois séculos (BITTENCOURT, 2004, p. 471).

As novas perspectivas históricas apontadas pelas pesquisas sobre esse material didático-pedagógico ressaltam a relevância de aplicá-lo em sala de aula, bem como sua relação com os contextos sociais de cada época. Assim, ao pertencerem e serem elaborados em determinado tempo histórico, esses materiais seguem parâmetros

curriculares impostos pelos governos vigentes, havendo também todo um sistema editorial envolvido em sua produção.

Ainda segundo outros autores, como Dante (1996, p. 83), “[...] o livro didático passou a ser o principal e, em muitos casos, o único instrumento de apoio ao trabalho docente”. Lajolo (1996, p. 4) assevera que os países como o Brasil, precários nas situações relacionadas à educação, fazem com que o livro “[...] acabe determinando conteúdos e condicionando estratégias de ensino, marcando, pois, de forma decisiva, o que se ensina e como se ensina o que se ensina”.

Dada a importância desse material para o trabalho do professor e no dia a dia dos alunos, ainda são disponibilizados, mesmo com os esforços governamentais, materiais de baixa qualidade e em quantidade insuficiente para que os professores possam desenvolver suas atividades em sala. Corre-se um risco quando os padrões de qualidade determinados pelo governo não são atendidos, os quais podem gerar erros editoriais ou estratégias pedagógicas inconsistentes, provocando exposição de conteúdo fora de uma sequência adequada ou de forma errônea.

Além dessas importantes questões, existe uma percepção de que

[...] muitas escolas brasileiras ainda não possuem todos os recursos necessários a uma aprendizagem significativa por parte do aluno como, por exemplo, muitas não possuem em suas bibliotecas um bom acervo de livros complementares que podem servir de suporte tanto ao professor quanto ao aluno, e nem sempre o laboratório de informática comporta um aluno por computador. Aliado a isso, tem-se o fato de que nem todos os alunos têm acesso à internet e outros meios de informação em suas residências (TURÍBIO, 2015, p. 103).

Desse modo, a falta de infraestrutura básica em algumas escolas, alinhada à carência de alguns recursos didáticos, aumentou a importância dos livros dentro do ambiente escolar e no cotidiano de cada um dos alunos.

Nesse sentido, segundo Carvalho e Lima (2010), o livro didático é o recurso de mais fácil acesso pelos alunos, pois é a única obra que eles têm em casa, além disso, ele tem sido “[...] um instrumento específico e importantíssimo de ensino e de aprendizagem formal” (LAJOLO, 1996, p. 4).

Contudo, Bittencourt (2004) destaca que o livro didático não é uma ferramenta simples, mas sim complexa, a ponto de ser um

[...] produto cultural; como mercadoria ligada ao mundo editorial e dentro da lógica de mercado capitalista; como suporte de conhecimentos e de métodos de ensino das diversas disciplinas e matérias escolares; e, ainda, como veículo de valores, ideológicos ou culturais (BITTENCOURT, 2004, p. 471).

Embora seja o recurso mais acessível, vem revestido de características determinadas pela cultura e sociedade que o produziu, torna-se um recurso complexo que exige determinadas posturas do professor para realizar a mediação entre o conhecimento disponibilizado em suas páginas com a realidade vivenciada pelo aluno. Deve também intermediar a relação entre o que propõe o currículo e a aprendizagem significativa, isto é, como transformá-la em realidade.

Choppin (2004), ao observar a complexidade dos livros didáticos, define quatro funções principais: referencial, instrumental, ideológica e documental. O autor destaca que essas funções “[...] podem variar consideravelmente segundo o ambiente sociocultural, à época, as disciplinas, os níveis de ensino, os métodos e as formas de utilização” (CHOPPIN, 2004, p. 553).

A primeira função do livro, a função referencial, remete a um material voltado com toda exclusividade aos programas de ensino, ou seja, voltada exclusivamente para atender as necessidades de um determinado currículo. Em todo caso, “[...] ele constitui o suporte privilegiado dos conteúdos educativos, o depositário dos conhecimentos, técnicas ou habilidades que um grupo social acredita que seja necessário transmitir às novas gerações” (CHOPPIN, 2004, p. 553).

Em sua pesquisa, Turíbio (2015, p. 22) destaca que os livros “[...] assumiram diferentes características no decorrer do tempo, que vão desde a inexistência de exercícios para serem resolvidos, como a inclusão de um conjunto de atividades resolvidas e por resolver [...]”. Assim, o livro didático não é estático, deve ser atualizado pelos autores e editoras, acompanhar as mudanças sociais e a evolução do conhecimento, de forma a permanecer ativo e dentro das propostas curriculares atuais.

Outra função é a instrumental, que possibilita ao livro didático estabelecer uma parceria perfeita entre professores e alunos no processo de ensino-aprendizagem-ensino, pois esse material dispõe de métodos para que alunos possam aprender e exercícios, bem como atividades para praticar (TURÍBIO, 2015).

Para Choppin (2004, p. 553), a função instrumental dos livros didáticos visa também “[...] facilitar a memorização dos conhecimentos, favorecer a aquisição de competências disciplinares ou transversais, a apropriação de habilidades, de métodos de análise ou de resolução de problemas [...]”.

Nessa perspectiva, os docentes têm à disposição um recurso importante para desenvolver as potencialidades de seus alunos e, conseqüentemente, contribuir para aperfeiçoar e avançar na aquisição dos conteúdos propostos. Alinhado ao currículo e com propostas pedagógicas coerentes e atualizadas, o livro didático torna-se significativo para o processo ensino-aprendizagem como um todo.

No que se refere à função ideológica e cultural, ela remete à antiguidade. Por exemplo, no século XIX, quando os sistemas de ensino estavam sendo desenvolvidos e com a constituição dos estados nacionais, os livros tinham também a função de transmitir os valores e a cultura das classes dominantes.

Choppin (2004, p. 553) salienta que o livro didático era um instrumento “[...] privilegiado de construção de identidade, geralmente ele é reconhecido, assim como a moeda e a bandeira, como um símbolo da soberania nacional e, nesse sentido, assume um importante papel político [...]”.

Andrade (2003) frisa que, no final do século XIX, no Brasil, os autores eram ligados à política, pois eram responsáveis por transmitir os valores religiosos, morais, econômicos, difundir a ciências. “Muitos desses autores trabalhavam em colégios de destaques na época, como D. Pedro II ou a Escola Militar: Justiniano José Rocha, Joaquim Manuel de Macedo, João Ribeiro (História) [...]” (ANDRADE, 2003, p. 80).

Assim, autores renomados do final do século XIX retratavam nos livros didáticos a ideologia dominante da sociedade da época, a proposta do governo. Hoje, isso também ocorre, principalmente quando há modificações nos parâmetros curriculares para adequá-los à ideologia dominante, ao implantar programas direcionados a atender ao mercado de trabalho, determinando a formação dos jovens segundo essas diretrizes.

Para além dessas quatro funções primárias, o autor Choppin (2004) afirma que os livros didáticos também podem ser documentos, salientando que podem oferecer “um conjunto de documentos, textuais ou icônicos, cuja observação ou confrontação podem vir a desenvolver o espírito crítico do aluno”. Dessa forma, ao utilizar o livro didático, os alunos têm plenas condições de desenvolver uma criticidade a respeito do que está lendo, logo:

Essa função surgiu muito recentemente na literatura escolar e não é universal: só é encontrada — afirmação que pode ser feita com muitas reservas — em ambientes pedagógicos que privilegiam a iniciativa pessoal da criança e visam a favorecer sua autonomia; supõe, também, um nível de formação elevado dos professores (CHOPPIN, 2004, p. 553).

Turíbio (2015) acrescenta que os conteúdos textuais do material didático podem proporcionar leituras diversificadas para os mais diferentes leitores, que se apropriarão dele, e a compreensão dependerá do conhecimento de mundo, bem como do grau de criticidade do estudante. Porém, a autora enfatiza que:

[...] essa prática precisa ser mediada pelo professor para que haja bons resultados, principalmente quando se tratar de textos específicos da Matemática, que necessitam de conhecimentos por parte do leitor, sendo o professor o mediador qualificado para interagir com o aluno durante o processo de compreensão e interpretação (TURÍBIO, 2015, p. 25).

Ao corroborar com as funções de Choppin, Dante (1996, p. 83) destaca que o livro didático permite um sequenciamento do conteúdo abordado nas disciplinas, de tal forma que alunos e professores possam abordar teorias de forma cronológica. Soares (1996) complementa a afirmação de Dante ao afirmar que os ensinamentos da escola devem passar por uma seleção, os quais, devem ser didatizados e, em seguida, escolarizados.

Nessa perspectiva, o Guia do Livro Didático do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) propõe que “Embora o livro didático seja um recurso importante no processo de ensino e aprendizagem, ele não deve ocupar papel dominante nesse processo. Assim, cabe ao professor manter-se atento para que sua autonomia pedagógica não seja comprometida [...]” (BRASIL, 2013, p. 13). Nesse contexto, o Guia do Livro Didático, atribui aos professores a função de complementar e ampliar, de forma a enriquecer as propostas dos livros, bem como contornar as deficiências ou, ainda, adequar as necessidades dos grupos de alunos que o utilizam (BRASIL, 2013).

Alinhados nessa perspectiva, Carvalho e Lima (2010) defendem que as características socioculturais escolares são de fundamental relevância e devem ser consideradas, sendo efetivas na formação integral dos sujeitos membros da comunidade escolar. Para tanto, segundo esses autores, o livro didático possibilita ao professor planejar de maneira mais efetiva, avaliar a aprendizagem, estimula a aquisição de saberes, bem como destacam

[...] não existe livro perfeito. Todos contêm imperfeições ou falhas no encaminhamento dado a certos assuntos. Compete aos colegas professores, que conhecem várias coleções, complementar alguns conteúdos ou modificar determinadas abordagens [...] (CARVALHO e LIMA, p. 22-23).

Esses aspectos ressaltam a importância do trabalho do professor, que não deve limitar-se a uma única fonte, mas sim diversificar, complementar, criar, experimentar algo novo, agregar novas situações-problemas conforme a realidade, o contexto existente, tendo autonomia para gerir sua função de educador.

Para Lajolo (1996), alinhada a essa perspectiva, por melhor que seja um livro didático, este não poderá ser utilizado sem adaptações. A autora destaca que não pode haver competição do livro didático com o professor, pois o docente, mais do que qualquer livro, conhece quais meios são essenciais para que os alunos possam compreender, quais são os tipos de exercícios e atividades já dominados pela classe.

Desse modo, a postura do professor é determinante para que o processo de ensino-aprendizagem seja eficiente. E, ao utilizar o livro didático, será possível guiar com mais eficiência o trabalho desenvolvido em sala, vai incentivar os alunos a buscar mais conhecimentos, experimentar, realizar as atividades propostas etc.

2.1 PROGRAMAS GOVERNAMENTAIS E OS LIVROS DIDÁTICOS

Em uma análise do percurso da educação brasileira, Turíbio (2015) constatou que, mesmo com todas as transformações e os diversos modelos propostos, a escola tem evoluído muito pouco com o passar dos anos, ela não perde em momento algum a sua natureza ortodoxa e burocrática. De maneira geral, por meio de uma pretensa hierarquia, organiza, regulamenta e separa os sujeitos e as atividades desenvolvidas no campo escolar, bem como seleciona os saberes e as competências a serem disseminados e absorvidos.

Assim, nesse cenário educativo, os livros apresentam-se como produto dessa cultura, que define regras e exprime limites e, concomitantemente, é um instrumento que direciona a aprendizagem dos indivíduos que o utilizam. Torna-se, então, imprescindível compreender sua concepção histórica, visto que está relacionada com as políticas educacionais.

Para Filgueiras (2013, p. 161-162), “[...] analisar como o Estado buscou controlar a produção e o uso dos livros didáticos é fundamental, pois demonstra como os sujeitos envolvidos com o controle dos manuais pretendiam definir o que era legítimo e poderia ser estudado pelos alunos”.

Antes da invenção da imprensa por Gutemberg, os livros, inicialmente, eram produzidos à mão, um trabalho árduo e maçante. Isso mudou radicalmente com o surgimento da imprensa no século XV, que possibilitou agilidade na reprodução, tornando-os o primeiro produto, até então, produzidos em série.

Apesar das mudanças introduzidas com a invenção da imprensa também no campo educacional, o ditado continuou sendo uma prática comum ao longo de muitos anos. Segundo Gatti Júnior (2004), até 1920, os livros no Brasil eram, em sua maioria, importados de Portugal e da França e quem tinha acesso a eles eram as classes dominantes da época.

A partir da década de 1930, contudo, as publicações nacionais tornaram-se mais frequentes e, desse ano em diante algumas medidas nacionais “propiciaram condições favoráveis ao aparecimento de autores e edições de livros didáticos em nosso país” (SOARES, 1996, p. 57). Essas medidas referem-se à ampliação do sistema educacional e o advento das faculdades de Filosofia nessa época.

Em 1930, com a criação do Ministério da Educação e Saúde Pública, objetivando organizar e centralizar a Saúde e a Educação, foi promulgado em 1931 o Decreto sob nº 19.890, com a finalidade de organizar o ensino médio por meio do currículo seriado (FILGUEIRAS, 2013).

A intenção com esse decreto foi controlar e padronizar redes de escolas públicas e privadas do país. Na Lei Maior de 1934 ficou instituído que o ensino seria centralizado pela União, estabelecendo gratuidade do ensino primário, bem como a gratuidade do ensino em idioma pátrio nas redes particulares.

As ações com o objetivo de centralizar a educação foram intensificadas a partir de 1937. A Língua Portuguesa tornou-se o idioma obrigatório nas unidades de ensino, fato que contribuiu para o fechamento de escolas estrangeiras nesse período. Esse movimento de

[...] reformas educacionais implantadas pelo governo federal e pelos governos estaduais, e o conseqüente aumento de crianças e jovens nas escolas, beneficiaram o mercado editorial de didáticos, que se expandiu significativamente entre os anos 1930 e 1940 (PAIXÃO, ano, apud FILGUEIRAS, 2013, p. 165).

Com o avanço editorial houve, o início de debates pelo Ministério da Educação para que os livros didáticos, bem como seu mercado, pudessem ser regulamentados, controlados e padronizados. Surgiu, assim, no ano de 1938, a Comissão Nacional do Livro Didático (CNLD), sendo enviado ao presidente Getúlio Vargas pelo então Ministro da Educação Capanema um projeto de decreto-lei que visava controlar as escolhas de livros e um documento denominado de “Livros escolares: projetos de exposição de motivos” (FILGUEIRAS, 2013, p. 165).

Capanema considerava o livro didático um instrumento com alcance superior a outros na educação “[...] pois seguia o aluno da escola ao lar, além de exercer função inspiradora e reguladora do trabalho docente, ao interferir na ordem e seriação das lições” (FILGUEIRAS, 2013, p. 165).

Junto ao Decreto nº 1.006 de 1938, que estabelecia, naquela época, as condições para produção, importação e uso dos livros didáticos, foi apresentada também a primeira definição para o livro didático em território brasileiro. O art. 2º do referido Decreto contém a conceituação de livro didático, conforme a seguir:

Para os efeitos da presente lei, são considerados livros didáticos os compêndios e os livros de leitura de classe.

§ 1º- Compêndios são livros que exponham total ou parcialmente a matéria das disciplinas constantes dos programas escolares.

§ 2º- Livros de leitura de classe são os livros usados para leitura dos alunos em aula (BRASIL, 1938, p. 2).

Ainda sobre a CNLD, seus membros eram escolhidos pelo Presidente da República, sendo ao todo sete e tinham especialização em áreas específicas, preparo pedagógico, e eram reconhecidos e com valor moral. As competências da CNLD, também foram atribuídas no art. 10 do Decreto nº 1.006, de 1938 e versavam sobre:

- a) Examinar os livros didáticos que lhe forem apresentados, e proferir julgamento favorável ou contrário à autorização de seu uso;
- b) Promover, periodicamente, a organização de exposições nacionais dos livros didáticos cujo uso tenha sido autorizado na forma desta lei;
- c) Indicar os livros didáticos estrangeiros de notável valor, que mereçam ser traduzidos e editados pelos poderes públicos, bem como sugerir-lhes a abertura de concurso para a produção de determinadas espécies de livros didáticos de sensível necessidade e ainda não existente no país (BRASIL, 1938).

A responsabilidade da CNLD era apenas de avaliação, sendo a escolha dos livros didáticos de responsabilidade dos diretores e dos professores. As editoras, para que pudessem ter suas obras avaliadas, deveriam enviar ao Ministro da Educação três exemplares do livro e uma petição. Nesse processo, um relator, juntamente com dois revisores, procedia a primeira análise dos livros, em seguida, teciam um parecer que eram destinados à plenária da CNLD. Os pareceres das obras analisadas

[...] precisavam esclarecer os motivos exatos da aprovação ou recusa dos livros, indicando, quando possível, modificações a serem feitas para a sua autorização. A obra modificada deveria ser novamente submetida à análise da CNLD, para decisão final. Os livros didáticos autorizados receberiam um número de registro que apareceria na capa juntamente com a frase: ‘livro de uso autorizado pelo Ministério da Educação’ (FILGUEIRAS, 2013, p. 166).

No decorrer do tempo, em 1945, houve mudanças na quantidade de membros da CNLD, passando de sete para quinze membros. O Decreto nº 8.460 não alterou os critérios até então utilizados para escolha dos livros didáticos, porém atribuiu aos docentes a escolha, entre as obras autorizadas, dos livros didáticos. O decreto consolidou os regimentos para uso, importação e produção dos livros didáticos.

No período de 1945 a 1966 o processo permaneceu o mesmo, porém em junho de 1966, o governo criou o Conselho do Livro Técnico e Didático (COLTED), que objetivava gerenciar as verbas de financiamento e os projetos direcionadas à ampliação do livro escolar e do livro técnico. Pouco tempo após a criação, em outubro do mesmo ano, o governo, por meio do Decreto nº 59.355/66, justificando que o decreto anterior não atendia plenamente as finalidades do COLTED, modificou sua nomenclatura para Comissão do Livro Técnico e do Livro Didático.

A Comissão tinha como finalidade “incentivar, orientar, coordenar e executar as atividades do Ministério da Educação e Cultura relacionadas com a produção, a edição, o aprimoramento e a distribuição de livros técnicos e de livros didáticos” (BRASIL, 1966, p. 2).

Para Filgueiras (2011) a criação da Comissão do Livro Técnico e do Livro Didático possibilitou ao Ministério da Educação (MEC) firmar acordos internacionais com duas instituições: a Agência Norte-Americana para o Desenvolvimento Internacional (USAID) e o Sindicato Nacional de Editores de Livros (SNEL). A intenção do acordo MEC/USAID/SNEL era disponibilizar aproximadamente cinquenta e um milhões de livros a estudantes brasileiros em até três anos, e também livros com preços acessíveis, contratos com editores, suprir as bibliotecas existentes e, até mesmo, construir novas.

Segundo Gatti Júnior (2004) houve um aumento de matrículas nessa época por famílias com pouca condição financeira para arcar com educação, e o livro didático se tornou a ferramenta ideal de acesso ao conhecimento. Assim, por intermédio do governo, os livros didáticos tornaram-se frequentes no cotidiano de muitos alunos, o que contribui para melhorar a qualidade no ensino ao auxiliar o aluno a estudar em casa lendo ou realizando atividades no próprio material.

Após a criação do COLTED que foi instituída, por meio da Lei nº 5.327/67, a Fundação Nacional do Material Escolar (FENAME). A finalidade da Fundação é “assegurar os instrumentos e condições de assistência educacional nos níveis de formação pré-escolar e de 1º e 2º Graus”, sendo um dos seus objetivos “a melhoria de qualidade, a diminuição dos custos e a criação de melhores condições de acesso dos usuários ao material escolar e didático[...]” (BRASIL, 1967, Lei 5.327/67). Por ser uma instituição sem fins lucrativos, os livros didáticos produzidos e comercializados pela FENAME eram disponibilizados à sociedade a preço de custo.

As mudanças prosseguiram e, com os recursos do Instituto Nacional do Livro (INL), em 1970 houve a implementação do Sistema de Coedição de Livros com as Editoras Nacionais, por meio da Portaria nº 35, do MEC. Em 1971, o COLTEC foi extinto e foi criado o Programa do Livro Didático para o Ensino Fundamental (PLIDEF). Após o encerramento do convênio firmado entre o MEC e o USAID foi necessário implantar o Sistema de Contribuição Financeira das Unidades Federativas para o Fundo do Livro Didático. Com recursos do Fundo Nacional do Desenvolvimento da Educação (FNDE), em 1976, a FANEME assumiu a gestão do Programa do Livro Didático (PLD), extinguindo também o INL, porém poucas escolas, principalmente as municipais, devido à falta de recursos, tiveram oportunidade de ser atendidas pelo programa.

Freitag (1987), citado por Lopes (2000), destaca que o PLIDEF foi uma consolidação do auxílio do governo para que alunos carentes do ensino fundamental pudessem obter livros didáticos. Por intermédio do Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio (PLIDEM) e do Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio Supletivo (PLIDESU), os alunos carentes que estudavam no Ensino Médio e, inclusive alunos do Supletivo, também puderam ter acesso ao livro didático gratuito.

Para garantir a assistência à educação da pré-escola até o término da Educação Básica, em 1983, o Governo por meio da Lei nº 7.091/83 renomeou a FENAME como Fundação de Assistência ao Estudante (FAE), com os objetivos a seguir:

- I - a melhoria de qualidade, a diminuição dos custos e a criação de melhores condições de acesso dos usuários ao material escolar e didático, à alimentação escolar e às bolsas de estudo e manutenção;
- II - a coordenação da política de assistência educacional, bem como o desenvolvimento de estudos visando a subsidiar a sua formulação;

III - o apoio à administração dos serviços de assistência educacional dos sistemas de ensino (BRASIL, 1983).

A FAE reunia diversos programas, objetivava prestar auxílio assistencial a alunos de baixa renda, e também atender às necessidades de alimentação, material escolar, bolsas de estudos, entre outros.

As constantes mudanças sociais, o aumento populacional, a escassez de verba provocou mudanças na política pública de oferta de livro didático a alunos das escolas públicas. Nesse contexto, por meio do Decreto nº 91.542, no ano de 1985 o governo implantou o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), com a finalidade de distribuir livros didáticos aos estudantes das escolas públicas de 1º Grau (BRASIL, 1985). Instituiu também a reutilização dos livros didáticos, tornando-os não mais descartáveis, e determinou a participação direta dos professores na seleção dos livros que seus alunos irão utilizar.

A participação docente nas escolhas dos livros didáticos é um fator decisivo para o processo ensino-aprendizagem e, conseqüentemente, para melhorar a qualidade do ensino, pois ele é um instrumento fundamental para a didática e a prática pedagógica no cotidiano escolar. Além disso, o conhecimento de seus alunos pela vivência diária contribui e auxilia o professor na seleção de livros didáticos mais adequados às necessidades deles, de forma que possam propiciar uma aprendizagem significativa e de acordo com o contexto dos alunos.

Em 1990 iniciou-se uma avaliação das indicações dos livros didáticos feita pelos docentes; de acordo com o FNDE (2013), em 1996, foi “[...] iniciado o processo de avaliação pedagógica dos livros inscritos para o PNLD, sendo publicado o primeiro Guia de Livros Didáticos de 1ª a 4ª série. Os livros foram avaliados pelo MEC conforme critérios previamente discutidos”. Com a extinção da FAE em 1997, o FNDE tornou-se responsável por executar o PNLD, expandindo consideravelmente o programa.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de 1ª a 4ª Série surgiram também no ano de 1997 e foram divulgados pelo MEC por intermédio da Secretaria de Educação Fundamental (SEF). Gatti Júnior (2004) assevera que os PCN surgiram para não serem visto como “[...] uma forma exclusiva de organização e ordenação dos

conteúdos e práticas escolares, com a intenção de não subtrair a autonomia de uma série de instâncias decisórias do sistema escolar brasileiro, entre as quais estão os professores” (GATTI JÚNIOR, 2004, p. 21).

Com essa publicação pelo MEC, as editoras precisaram rapidamente se adequar ao PCN, procurando divulgar nas capas dos livros que seus conteúdos estavam em conformidade com o PCN. Isso provou um estremecimento nas relações entre governo e editoras, que se tornaram intensas e complexas nesse período. As editoras queriam adaptar suas obras didáticas de acordo com o PCN e o livro didático continuava sendo referência não só para reformas curriculares, mas, principalmente, para efetivar a prática e o ensino dos professores em todo o país.

Para sanar esse problema, foi preciso estreitar o diálogo entre editoras e governo para adaptar as obras e imprimi-las. Posteriormente, foram distribuídas na maior parte do território nacional, de forma que alunos e professores pudessem utilizar em suas práticas educativas sempre no ano em que deveria ser utilizado pelos alunos.

De acordo com o FNDE (2013), em 2000, pela primeira vez, os livros didáticos foram entregues no ano anterior ao de sua utilização. Assim, os livros que seriam utilizados em 2001 foram entregues até o último dia de 2000. Já no ano seguinte, houve também a publicação de livros didáticos em Braille, e estes foram disponibilizados aos alunos com deficiência visual, que passaram a ser atendidos pelo Programa PNLD.

De forma progressiva, o Ensino Médio, a partir de 2004, foi atendido pelo Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio (PNLEM), criado por meio da Resolução nº 38 do FNDE. Após 2005, e de forma gradativa, ocorreu a distribuição de livros de todos os componentes curriculares da Educação Básica, com exceção da Educação Infantil (BRASIL, 2013). Nesse processo, de acordo com o Portal do MEC, somente em 2008 as disciplinas de Geografia e Física tiveram os livros avaliados e selecionados pelo PNLEM. Já no ano de 2009, seguindo o avanço tecnológico, a seleção dos livros didáticos relacionados no PNLEM foi totalmente pela internet no site do FNDE.

Em 2010, o MEC lançou o Projeto do Livro Acessível, com a finalidade de “promover a acessibilidade, no âmbito do Programa Nacional Livro Didático – PNLD e Programa Nacional da Biblioteca Escolar - PNBE, assegurando aos estudantes com deficiência visual matriculados em escolas públicas da educação básica, livros em formatos acessíveis” (BRASIL, 2018).

Além de atender aos alunos matriculados em escolas públicas da área urbana, em 2012 houve uma mudança nos livros destinados aos alunos do ensino fundamental das escolas rurais, que passaram a ter livros didáticos diferenciados. Os livros didáticos destinados aos alunos de escolas rurais são consumíveis, não sendo necessário devolvê-los no final do ano letivo, ainda podemos considerar que os livros “[...] do PNLD Campo têm configuração diferenciada e podem ser multisseriados, multidisciplinares e divididos por áreas de ensino (SHWARTZ, ano, apud BRASIL, 2012).

Os programas relacionados aos livros didáticos alcançaram mais abrangência territorial e todos os níveis da educação na última década. Possibilitaram, desse modo, o acesso a eles por alunos de todos os níveis da Educação Básica das escolas públicas e, por sua vez expandiram o acesso e o direito também às escolas rurais, bem como a adequação gráfica para Braille para alunos com deficiência visual.

Em 2017, para comemorar os 80 anos de programas relacionados ao livro didático, em especial, o PNLD, o MEC participou da 18ª edição da Bienal Internacional do Livro Rio. O Programa Nacional do Livro e do Material Didático busca prover as escolas de educação básica de registros didáticos e pedagógicos, ampliando o acesso ao livro e a democratização do acesso às fontes de informação e cultura. “O FNDE e o MEC são grandes incentivadores da leitura e do bom uso do livro. Esse ano nós completamos 80 anos do nosso PNLD, o que demonstra toda a identificação da bienal com o FNDE e com o Ministério da Educação”, celebrou Silvio Pinheiro (BRASIL, 2018).

Em suma, há legislações direcionadas às concepções, à distribuição, editoração e aos conteúdos abordados nos livros, leis que precisaram se adequar às necessidades da sociedade de cada época.

Nesse sentido, as mudanças provocaram alterações significativas e, entre elas, estabelecer um diálogo mais próximo entre o governo e as editoras, de modo que os livros didáticos pudessem acompanhar essas mudanças, bem como aperfeiçoar a prática pedagógica, estimular a aprendizagem dos alunos e contribuir para melhorar a qualidade do processo ensino-aprendizagem.

Todavia, apesar de todos os esforços para atender as escolas em todo o país, ainda existem falhas relacionadas, principalmente, à distribuição do material, à quantidade necessária etc. que precisam ser resolvidas rapidamente, pois o livro didático continua sendo um instrumento imprescindível para a disseminação do conhecimento e a aprendizagem dos alunos.

3 PERCURSO METODOLÓGICO

Esta pesquisa caracteriza-se como uma pesquisa documental, pois os objetos de estudo, os livros didáticos, são considerados documentos. Samara e Tupy (2010) destacam que a pesquisa documental possibilita reproduzir a informação e, de forma fidedigna, permite as devidas citações.

As autoras Samara e Tupy (2010), destacam que

[...] os documentos que fundamentam os estudos históricos assumem, hoje, as formas mais diversas, abordam diferentes conteúdos e podem ser encontrados em lugares mais variados. Uma infinidade de registro apresenta-se disponível atualmente par ao trabalho do historiador. Cada vez mais acessíveis, as informações sobre um determinado tema provêm das mais diversas origens: jornais, revistas, livros, noticiários de rádio e televisão, filmes, documentários, internet, anedotário, linguagem e oralidade, entre tantas outras, constituem apenas alguns exemplos [...] (SAMARA; TUPY, 2010, p. 67-68).

Com essa visão, elas propõem abordar de forma mais ampla os documentos, o que permite uma discussão produtiva sobre um conjunto determinado de elementos, de acordo com os requisitos de análise, desde que haja condições científicas para uma contextualização adequada. É preciso, por sua vez, exaurir ao máximo as informações passíveis de serem coletadas dos documentos analisados.

Para obter as informações necessárias foi utilizada a análise de conteúdo dos livros didáticos pesquisados. Conforme Bardin (1988) citado por Thiengo (2001), a análise de conteúdo pode ser aplicada tanto para o que foi falado quanto para o que está escrito. Assim, Thiengo (2001) destaca que “[...] o livro didático se inclui claramente no vasto campo de aplicação deste método, que abrange todas as comunicações” (THIENGO, 2001, p. 53).

Segundo Guerra (2014), a análise de conteúdo “[...] é uma técnica de tratamento de dados coletados, que visa à interpretação de material de caráter qualitativo, assegurando uma descrição objetiva, sistemática e com a riqueza manifesta no momento da coleta dos mesmos [...]” (GUERRA, 2014, p. 38). A autora se fundamenta em Bardin (2009) para as etapas da análise de conteúdo, que são: pré-análise; exploração do material; e tratamento dos resultados obtidos e interpretação.

Cada uma dessas fases tem suas características específicas, entre elas:

[...] na fase da pré-análise estabelece-se uma organização do material, a partir da escolha de documentos/informações relevantes, permitindo-se uma “leitura flutuante” do material até que a decisão sobre quais informações devem ser consideradas na análise fique mais clara.

Na fase da exploração do material, BARDIN (2009) ressalta que a análise do material exige sua codificação, ou seja, sua transformação de dados brutos dos textos por recortes, agregação ou enumeração, até que sua codificação atinja a representação do conteúdo ou sua expressão. Para codificação, pode-se usar palavras, temas, contextos, relações, personagens, etc., até se chegar à categorização dos mesmos[...].

Para se chegar na fase três, do tratamento dos resultados, o pesquisador deve realizar as interpretações dos dados a partir da teoria escolhida[...] (BARDIN, 2009, apud GUERRA, 2014, p. 39-40).

Desse modo, esta pesquisa seguiu essas etapas, procurando evitar quaisquer tipos de vícios que pudessem surgir caso não houvesse esse cuidado. Primeiramente, fez-se uma pré-análise dos livros didáticos, seguido pela organização dos materiais que discutem o tema trigonometria no triângulo retângulo.

3.1 INSTRUMENTOS DE COLETAS DE DADOS

Para realizar esta pesquisa, os recursos tecnológicos disponíveis foram significativos. Nessa perspectiva, Samara e Tupy (2010) citam a importância desses recursos nas pesquisas históricas, visto que ocorre a introdução de novos métodos e técnicas de trabalhos no desenvolvimento do estudo. Samara e Tupy (201, p. 131 – grifo do autor) destacam que o acesso à internet permite

[...] maiores possibilidades de acesso ao documento, sua digitalização e o barateamento do custo de novas tecnologias de transmissão, via telefone, rádio ou *cablemodem*, bem como o aumento de velocidade na atualização de dados e programas – os *downloads* –, vêm contribuindo decisivamente para a sua popularização..

As inúmeras possibilidades disponibilizadas pelas tecnologias permitiram descobrir durante o período de busca pelos livros didáticos um acervo digital importante, o acervo do Grupo de Pesquisa de História da Educação Matemática (Ghemat) da Universidade Federal de São Paulo. Trata-se de disponibilizar on-line partes de documentos, para que os pesquisadores interessados em estudar o livro didático possam acessar esses materiais. Trata-se de um acervo excelente, pois há livros disponíveis que datam desde 1930 até 1980. O próprio Ghemat enfatiza que essa base de dados serve de referência para inúmeras pesquisas, como:

[...] as transformações e organização do saber matemático para ser ensinado no atual Ensino Médio; a introdução e supressão de conteúdos matemáticos ao longo de 50 anos; as mudanças didático-pedagógicas envolvidas no ensino da matemática para o colégio, dentre outros temas (Ghemat, 2018).

Por se tratar de uma instituição séria e idônea, essa fonte digital, com todo aparato tecnológico, asseguram as informações contidas nesses documentos digitalizados sem correr o risco de surgir alterações nos materiais disponibilizados. Dessa forma, foram realizados estudos nos títulos listados (APÊNDICE I), de modo a identificar:

- Se nos livros havia o conteúdo de trigonometria.
- Se nos livros eram realizadas a dedução dos ângulos notáveis.
- Se os livros apresentavam variação de altura inacessível.

Para tanto, foram observados

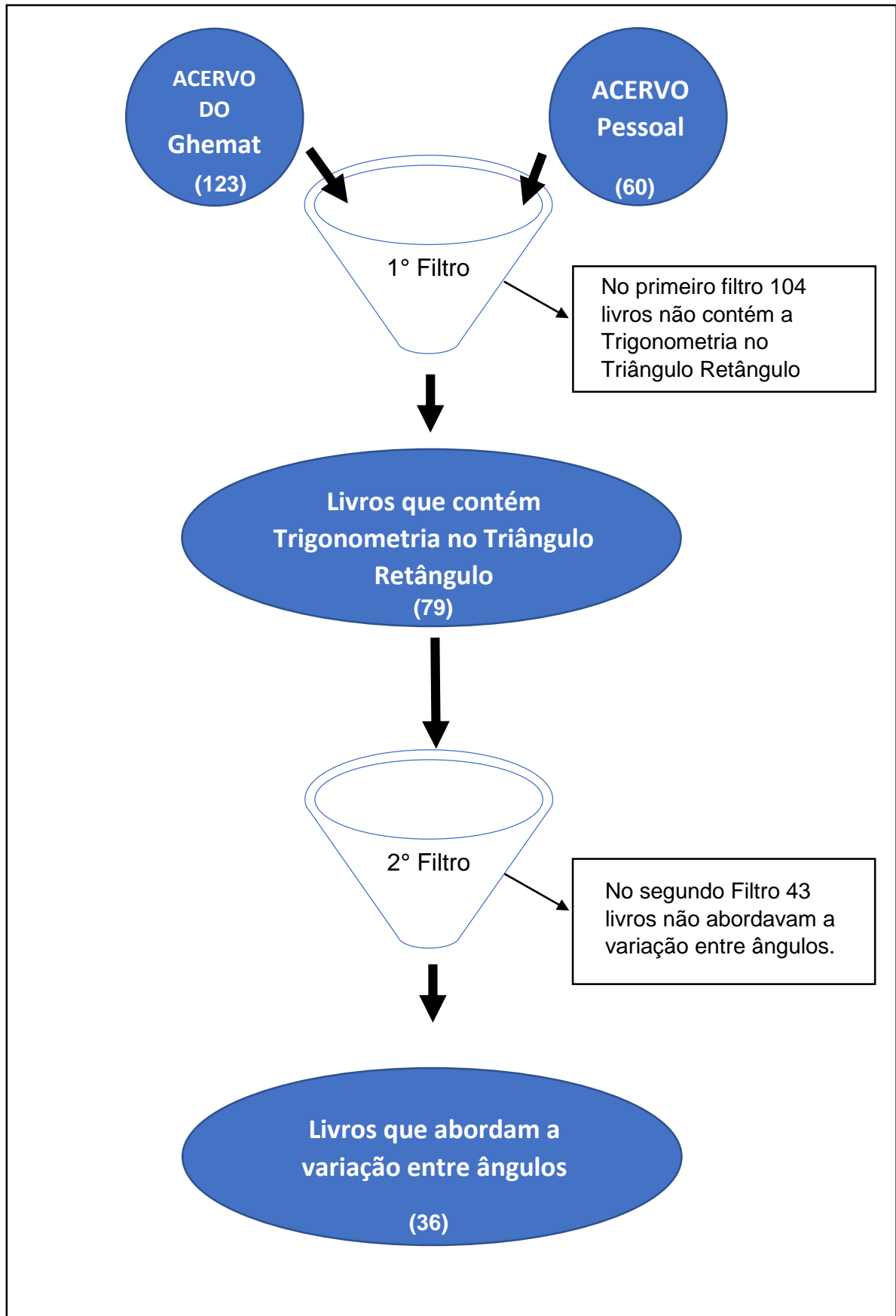
- Deduções dos ângulos notáveis.
- Tabelas dos ângulos notáveis.
- Exercícios envolvendo variação de ângulos.
- Resoluções propostas nos livros dos professores.

Assim, para organizar os dados e fazer a análise dos livros didáticos, o instrumento utilizado foi o Microsoft Office Excel. Esse instrumento foi definido após discussões e análises prévias do material que, em sua versão definitiva, encontram-se descritos a seguir, sendo possível associar a cada um deles os objetivos deste trabalho, de forma a refletir o foco de interesse do estudo.

Samara e Tupy (2010, p. 139) destacam que a tecnologia tem por finalidade facilitar o “[...] trabalho de pesquisa, auxiliar a elaboração de teorias que justifiquem a especificidade ou não dos dados encontrados e viabilizar análises comparativas entre os diversos conjuntos de inventários pesquisados [...]”.

Com a elaboração da planilha em Excel com os itens de análises foi possível fazer a distinção entre os livros pesquisados, de modo a selecionar aqueles que contemplam os objetivos desta pesquisa. A Figura 1 a seguir ilustra como ocorreu esse tratamento inicial.

Figura 1 – Proposta de seleção e classificação dos livros didáticos conforme os conteúdos



Fonte: Pesquisador, 2018.

Esse “funil”, representado na Figura 1, mostra toda a trajetória da seleção dos livros didáticos feitos pelo pesquisador. Começou buscando os acervos de livros didáticos e, após a organização do acervo, os livros passaram a ser organizados pelo tema de trigonometria para, em seguida, serem analisados visando identificar algumas ilustrações, explicações e até mesmo exercícios que demonstrassem a variação de ângulos. O último filtro resultou na organização e tabulação dos 36 livros que apresentam variação de ângulos, esses livros foram analisados conforme a metodologia empenhada.

3.2 MATERIAIS E MÉTODOS

Os materiais utilizados nesta pesquisa foram livros didáticos datados de 1929 a 2017. É importante evidenciar esse período pois, conforme abordado anteriormente no referencial teórico, foi somente em 1938, pelo Decreto nº 1.006, que ocorreu a primeira definição para livro didático em território brasileiro, as regras para publicações e os parâmetros de fiscalizações com o objetivo de controlar as informações que seriam disponibilizadas.

O estudo foi realizado em arquivos públicos e arquivos particulares. Os arquivos públicos referem-se aos livros digitalizados e disponíveis no site do Ghemat da Unifesp, já os arquivos particulares pertencem ao acervo particular do próprio pesquisador.

Independentemente da época do livro didático, existe uma premissa de que os conteúdos abordados normalmente são idênticos. Thiengo (2001) afirma que “[...] desde os conceitos, a terminologia, a organização do *corpus* do conhecimento, os exemplos utilizados até mesmo os exercícios praticados, são idênticos, com pequenas variações” (THIENGO, 2001, p. 55).

Desse modo, foram selecionados entre os livros didáticos de Matemática (APÊNDICE I) todos os livros do Ghemat e do acervo pessoal com o conteúdo trigonometria. De modo geral, esses materiais permitiram fazer um levantamento documental significativo a respeito da abordagem trigonométrica em livros didáticos.

A Tabela 1 a seguir contém a quantidade de livros utilizados do acervo pessoal e do acervo do repositório do Ghemat.

Tabela 1 – Relação entre acervo pessoal e do Ghemat

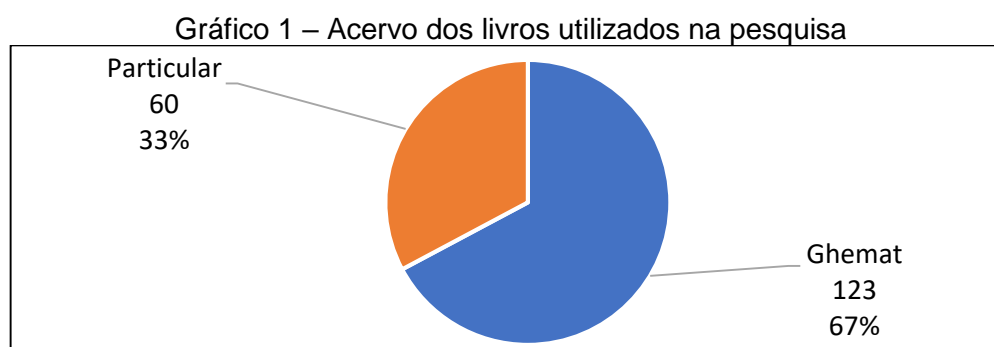
ACERVO	QUANTIDADE
Livros didáticos do acervo pessoal	60
Livros didáticos do acervo Ghemat	123
TOTAL	183

Fonte: Pesquisador, 2018.

Inicialmente, a busca foi por livros didáticos com conteúdo de trigonometria, porém, devido à distância geográfica e ao tempo disponível para pesquisar na biblioteca durante o mês de dezembro de 2017 e janeiro de 2018, a opção foi adquirir livros didáticos que datam entre 1904 a 1997; os livros posteriores a esse período, inclusive publicações do PNLD de 2018, já existiam no acervo pessoal.

Durante a pesquisa, foram tabulados diversos títulos de livros de Matemática, Trigonometria e os atuais livros didáticos, que datam de 1929 a 2017, sempre com a intenção de identificar os livros que continham conteúdo de trigonometria.

Conforme apresentado no tópico Metodologia, os livros utilizados para desenvolver esta pesquisa foram obtidos em dois lugares distintos, sendo: o acervo digital do site do Ghemat, que contém 123 livros didáticos, em língua portuguesa, datados de 1929 a 1986; e, também, o acervo pessoal do pesquisador, com 60 livros que abordam a trigonometria desde o ano de 1904 até 2017. O Gráfico 1 retrata a distribuição do acervo pesquisado.



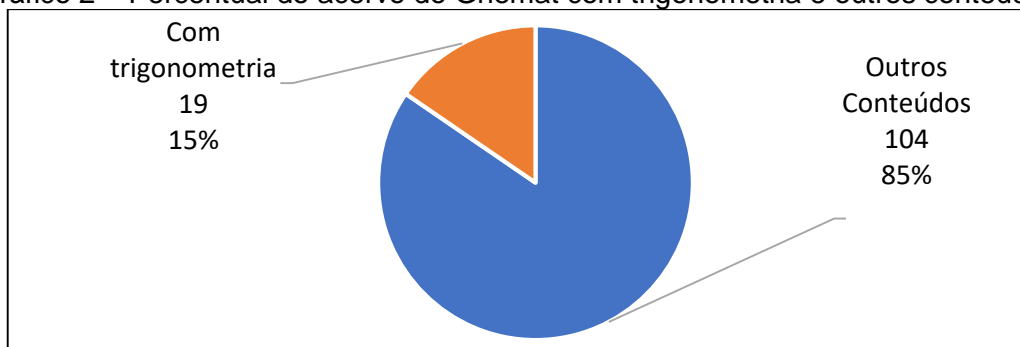
Fonte: Pesquisador, 2018.

Ao todo foram analisados 183 livros didáticos ou dos cursos complementares e/ou específicos, dos quais, conforme o Gráfico 1, 67% estão disponíveis virtualmente por meio do site do Ghemat, bem como 33% dos livros estão disponíveis fisicamente no acervo do pesquisador. É uma sólida e relevante base de documentos que, por si só, e pela diversidade de informações contidas neles, garantem e asseguram as informações relatadas neste estudo.

Por meio desse eixo central foram analisados livros com conteúdo específico de trigonometria, nesse caso, livros datados antes de 1938, ou seja, antes da primeira legislação que apresentavam os livros didáticos e os formalizavam. Nessa situação, esses livros focavam determinada área de estudo. Além disso, e muito importante, os livros didáticos foram se adaptando às necessidades sociopolíticas de cada época.

Ao analisar todos os livros do repositório virtual do Ghemat descobriu-se que nem todos contêm conteúdo de trigonometria. Diante disso surgiu um primeiro filtro, separando os livros desse portal com conteúdo de trigonometria dos que não abordam a trigonometria. O Gráfico 2 a seguir representa a organização da seleção dos livros do Ghemat.

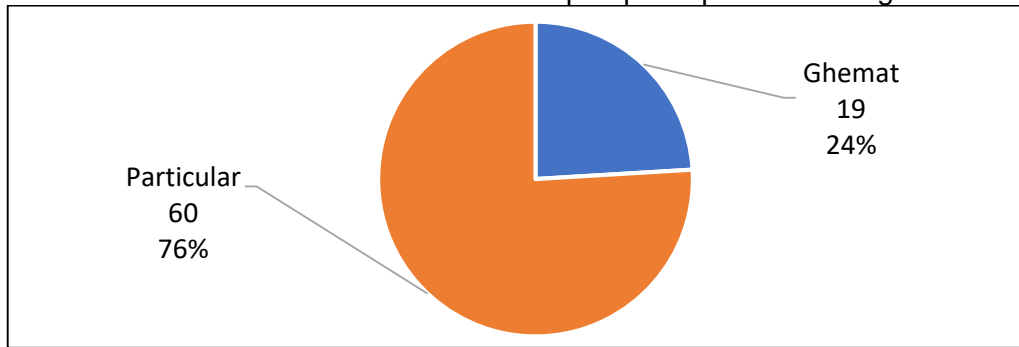
Gráfico 2 – Percentual do acervo do Ghemat com trigonometria e outros conteúdos



Fonte: Pesquisador, 2018.

Assim, segundo o que consta no Gráfico 2, apenas 15% dos livros analisados contêm o tema trigonometria. O Gráfico 3 a seguir mostra o percentual dos acervos que contém a trigonometria.

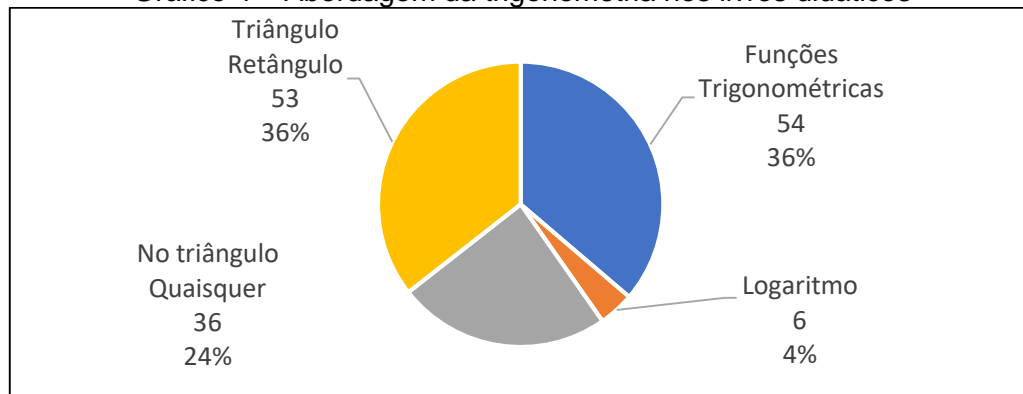
Gráfico 3 – Acervo dos livros utilizados na pesquisa que contém trigonometria



Fonte: Pesquisador, 2018.

Após identificar os livros que versam sobre trigonometria como eixo central ou em seu sumário, foi realizada uma leitura ampla dos capítulos referentes a esse conteúdo, os quais abordam a trigonometria da seguinte forma: no triângulo retângulo; no triângulo quaisquer; na circunferência; e com logaritmos. O Gráfico 4 a seguir apresenta o percentual de cada abordagem da trigonometria nos livros analisados.

Gráfico 4 – Abordagem da trigonometria nos livros didáticos



Fonte: Pesquisador, 2018.

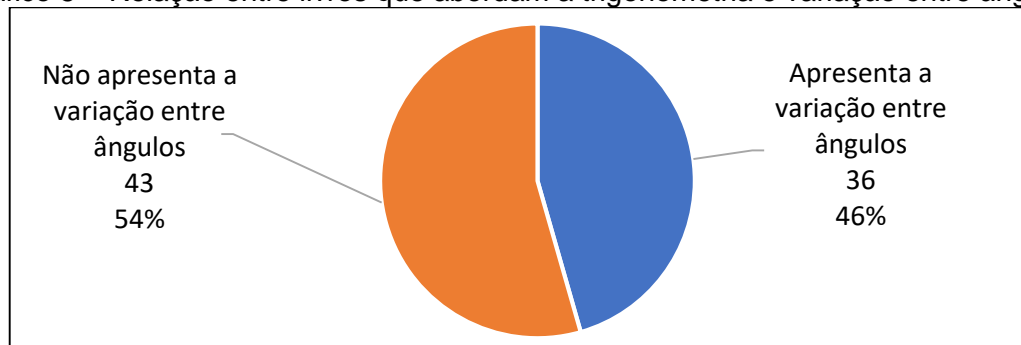
Observa-se pelo Gráfico 4 que, dos 79 livros didáticos que abordam a trigonometria, 4% dão ênfase ao logaritmo, 24% a abordam em um triângulo qualquer, 36% retratam funções trigonométricas, e 36% desses livros apresentam a trigonometria no triângulo retângulo.

Tais mudanças bruscas tornam-se perceptíveis ao observarmos os períodos das legislações e os interesses com o ensino da Matemática. Para o Ghemat (2018), as “[...] orientações de ensino definem temas de conteúdos matemáticos para serem ensinados nas três modalidades. De maneira geral encontram-se presentes: ‘Álgebra’, ‘Álgebra Superior’, ‘Cálculo Vetorial’, ‘Geometria Analítica’ e ‘Trigonometria’[...]”.

Nessa linha, o grupo de pesquisa Ghemat (2018) obteve a seguinte conclusão: “[...] Esses "blocos de conteúdos matemáticos" dão origem a livros didáticos cuja preocupação é atender a legislação vigente dando suporte ao ensino ministrado nos Cursos Complementares”.

Dessa forma, o Gráfico 4 demonstrou que 36% dos livros com conteúdo de trigonometria tratam da trigonometria no triângulo retângulo, os demais 66% apresentam outra discussão desse conteúdo. Assim, fica evidente que nem todos os livros que abordam a trigonometria apresentam esse conteúdo de forma similar, sendo necessário compreender que a abordagem neste estudo é a trigonometria no triângulo retângulo. O Gráfico 5 apresenta o percentual de livros que abordam a trigonometria e que também abordam a variação entre ângulos.

Gráfico 5 – Relação entre livros que abordam a trigonometria e variação entre ângulos



Fonte: Pesquisador, 2018.

Percebe-se pelos dados contidos no Gráfico 5 que, dos livros que abordam o conteúdo trigonometria, 46% também abordam de alguma forma a variação entre ângulos. Isso não significa que os livros trazem a variação entre ângulos como uma parte específica do conteúdo de trigonometria, mas sim em exemplos resolvidos ou em exercício.

3.3 RESTRIÇÃO DA PESQUISA

Toda pesquisa tem suas restrições, e não é diferente neste estudo. Assim, nesta pesquisa não se aplica em nenhum momento as leis de seno e de cosseno e/ou outros métodos matemáticos que possam levar aos mesmos resultados propostos aqui. Nessa linha, a pesquisa se restringe a três métodos de dedução, os quais serão apresentados no tópico três, denominado propostas de deduções.

4 ANÁLISES DOS DADOS

O presente capítulo objetiva analisar e discutir os dados coletados por meio da metodologia apresentada. É um momento rico, ímpar e imprescindível, em que as reflexões sobre o conteúdo de trigonometria nos livros didáticos possibilitaram compreender mais precisamente a proposta do trabalho.

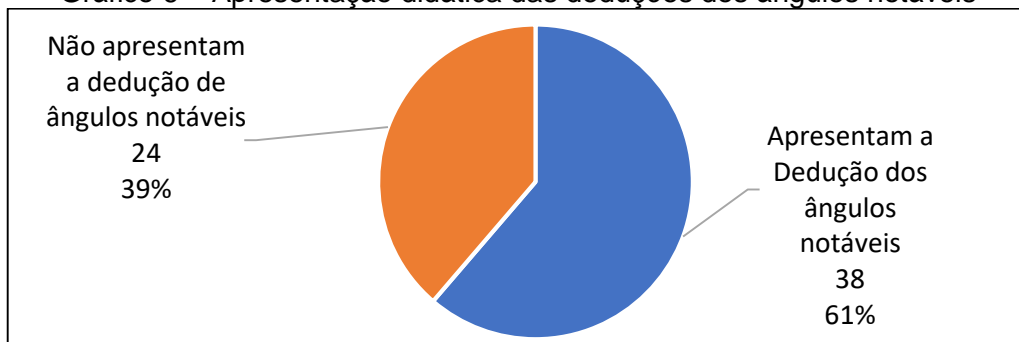
A análise dos dados propicia uma discussão sobre o livro didático referente à trigonometria, porém convém ressaltar que não existe intenção de discutir outros conteúdos que não seja a trigonometria no triângulo retângulo com o cálculo de altura de bases inacessíveis.

Por sua vez, no penúltimo tópico, será abordada a temática da pesquisa, demonstrando como os livros didáticos ao longo dos anos têm apresentado o cálculo de altura inacessível por meio da variação de ângulos notáveis. No último tópico foi desenvolvida uma análise sobre os exercícios que envolvem o tema da pesquisa, bem como as propostas de resoluções contidas nos livros didáticos.

4.1 DEDUÇÃO DOS ÂNGULOS NOTÁVEIS

Os ângulos notáveis, ângulos de 30° , 45° e 60° , são ângulos que aparecem corriqueiramente no meio acadêmico e, sendo assim, os livros didáticos também abordam essa parte da trigonometria. O Gráfico 6 a seguir relaciona, os livros com conteúdo de trigonometria, os materiais que contemplam e os que não contemplam a dedução dos ângulos notáveis.

Gráfico 6 – Apresentação didática das deduções dos ângulos notáveis

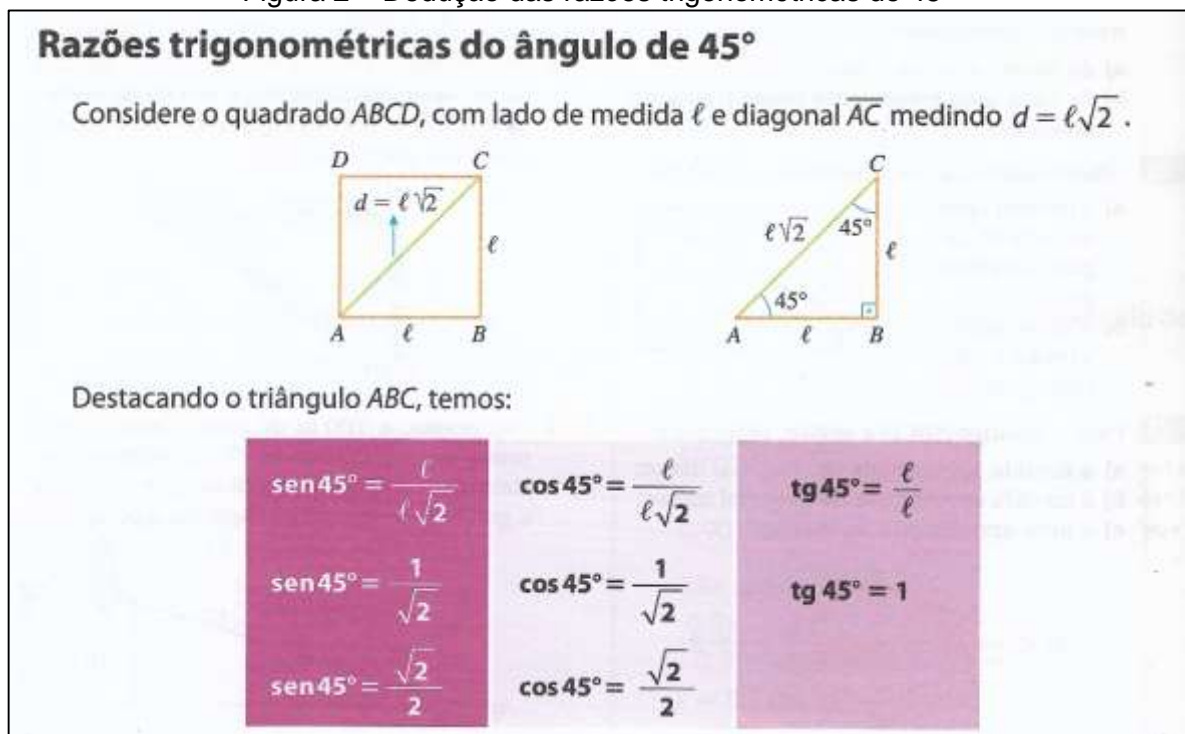


Fonte: Pesquisador, 2018.

Assim, infere-se pelo Gráfico 6 que na maioria dos livros pesquisados com o conteúdo de trigonometria, 61% deles apresentam a dedução dos ângulos notáveis. O autor Branco (2013) já discutia que nem todos os livros didáticos apresentavam essas deduções. Para ele, muitas bibliografias básicas do ensino fundamental e do ensino médio são superficiais nesse quesito por não deduzirem esses ângulos notáveis. E 39% não apresentam a dedução dos ângulos notáveis.

Ao analisar os livros didáticos que deduzem os ângulos notáveis, nota-se a semelhança entre as explicações e cada uma das etapas. Os livros pesquisados abordam tais deduções da mesma forma: por meio de um quadrado para deduzir o ângulo de 45° conforme ilustrado nas Figuras 2 e 3, e por meio de um triângulo equilátero para deduzir os ângulos de 30° e 60° de acordo com as Figuras 4 e 5.

Figura 2 – Dedução das razões trigonométricas de 45°

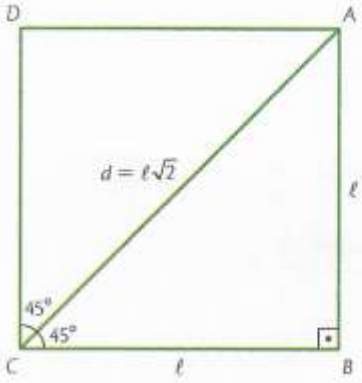


Fonte: Bianchini (2006, p. 158).

Na Figura 2, o autor Bianchini (2006) demonstra, ao utilizar um quadrado, as deduções dos valores trigonométricos do ângulo de 45° . Na Figura 3 a seguir, Andrini (2012) utiliza o mesmo instrumento para obter os valores das razões de seno, cosseno e tangente do ângulo de 45° .

Figura 3 – Dedução das razões trigonométricas de 45°

A diagonal d é eixo de simetria do quadrado de lado ℓ : divide o ângulo reto em dois ângulos de 45°.



Sobre a Trigonometria

Como já dissemos, a palavra **trigonometria** vem do grego e significa "medida de triângulos". O desenvolvimento deste ramo da Matemática está ligado a Astronomia, navegação, cartografia, entre outros. Você prosseguirá com o estudo da Trigonometria no Ensino Médio e terá a oportunidade de aplicar estes conhecimentos na Física, por exemplo.

Já descobrimos, pelo teorema de Pitágoras, que $d = \ell\sqrt{2}$.
O triângulo ABC é retângulo. Vamos calcular:

♦ $\text{sen } 45^\circ = \frac{\text{medida do cateto oposto ao ângulo de } 45^\circ}{\text{medida da hipotenusa}}$

$$\text{sen } 45^\circ = \frac{\ell}{\ell\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{ou} \quad \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

racionalizando o denominador

Na tabela, $\text{sen } 45^\circ = 0,7071$.

Numa calculadora, digitando $\boxed{2} \boxed{\sqrt{}} \boxed{\div} \boxed{2}$ para calcular $\frac{\sqrt{2}}{2}$, obtemos 0,7071067...

0,7071 é uma aproximação racional para $\text{sen } 45^\circ$ e $\frac{\sqrt{2}}{2}$ é o valor exato de $\text{sen } 45^\circ$

Ainda no triângulo ABC:

♦ $\text{cos } 45^\circ = \frac{\text{medida do cateto adjacente ao ângulo de } 45^\circ}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{\ell}{\ell\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

♦ $\text{tg } 45^\circ = \frac{\text{medida do cateto oposto a } 45^\circ}{\text{medida do cateto adjacente a } 45^\circ} = \frac{\ell}{\ell} = 1$

Valor exato de $\text{cos } 45^\circ$.

Há situações em que é melhor trabalhar com valores exatos de seno e de cosseno de 45°.

Fonte: Andrini (2012, p. 212).

As Figuras 2 e 3 permitem visualizar as semelhanças na abordagem utilizada pelos autores de livros didáticos para determinar as razões trigonométricas no triângulo retângulo do ângulo de 45°. De modo geral, para realizar essa demonstração os livros

pesquisados usam o quadrado para contextualizar geometricamente a situação, bem como aplicar o Teorema de Pitágoras como parte integrante da resolução.

As explicações didáticas dos ângulos notáveis de 30° e 60° também se assemelham nos materiais pesquisados, representados nas Figuras 4 e 5 a seguir, nas quais se encontram as demonstrações utilizadas pelos autores para alcançar os resultados numéricos das razões trigonométricas desses ângulos.

Figura 4 – Dedução da razão trigonométrica de 60°

Podemos obter também, a partir do triângulo equilátero, os valores exatos das razões trigonométricas para os ângulos de 30° e de 60° .

Acompanhe:

Um triângulo equilátero tem três ângulos de 60° . Traçamos a altura AH que está num dos eixos de simetria do triângulo equilátero de lado ℓ , obtendo o triângulo retângulo AHB .

Lembrando que a altura de um triângulo equilátero de lado ℓ é

$$h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}, \text{ temos:}$$

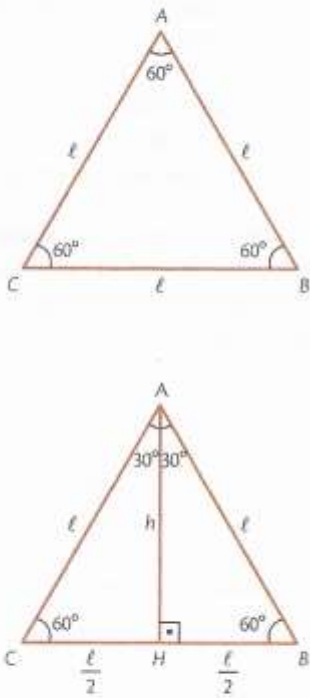
- $\text{sen } 60^\circ = \frac{\text{medida do cateto oposto ao ângulo de } 60^\circ}{\text{medida da hipotenusa}}$

$$\text{sen } 60^\circ = \frac{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{\ell} = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\ell} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

- $\text{cos } 60^\circ = \frac{\text{medida do cateto adjacente ao ângulo de } 60^\circ}{\text{medida da hipotenusa}}$

$$\text{cos } 60^\circ = \frac{\frac{\ell}{2}}{\ell} = \frac{\ell}{2} \cdot \frac{1}{\ell} = \frac{1}{2}$$

- $\text{tg } 60^\circ = \frac{\text{medida do cateto oposto a } 60^\circ}{\text{medida do cateto adjacente a } 60^\circ}$

$$\text{tg } 60^\circ = \frac{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{\frac{\ell}{2}} = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{\ell} = \sqrt{3}$$


Fonte: Andrini (2012, p. 217).

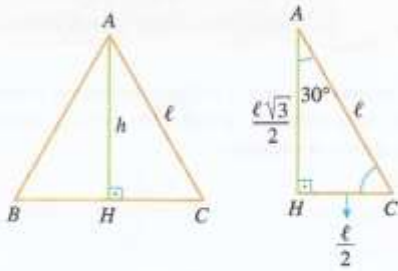
Na Figura 4 há a dedução do seno, cosseno e tangente do ângulo de 60° por meio das propriedades aplicáveis no triângulo equilátero. Tal modelo também é utilizado por outros autores, sendo um deles demonstrado na Figura 5 a seguir.

Figura 5 – Dedução das razões trigonométricas de 30° e 60°

Razões trigonométricas do ângulo de 30°

Considere agora o triângulo equilátero ABC , com lado de medida ℓ .

A altura \overline{AH} do triângulo mede $h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$.



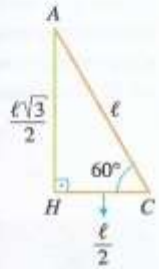
Destacando do $\triangle ABC$ o $\triangle AHC$, temos:

$\text{sen } 30^\circ = \frac{\ell}{2}$	$\text{cos } 30^\circ = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$	$\text{tg } 30^\circ = \frac{\ell}{\ell\sqrt{3}}$
$\text{sen } 30^\circ = \frac{\ell}{2} \cdot \frac{1}{\ell}$	$\text{cos } 30^\circ = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\ell}$	$\text{tg } 30^\circ = \frac{\ell}{2} \cdot \frac{2}{\ell\sqrt{3}}$
$\text{sen } 30^\circ = \frac{1}{2}$	$\text{cos } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\text{tg } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Razões trigonométricas do ângulo de 60°

Destacando novamente o $\triangle AHC$, da figura anterior, temos:

$\text{sen } 60^\circ = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$	$\text{cos } 60^\circ = \frac{\ell}{2}$	$\text{tg } 60^\circ = \frac{\ell\sqrt{3}}{\ell}$
$\text{sen } 60^\circ = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\ell}$	$\text{cos } 60^\circ = \frac{\ell}{2} \cdot \frac{1}{\ell}$	$\text{tg } 60^\circ = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{\ell}$
$\text{sen } 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\text{cos } 60^\circ = \frac{1}{2}$	$\text{tg } 60^\circ = \sqrt{3}$



Vamos organizar em um quadro todos os valores encontrados:

Ângulo	Seno	Cosseno	Tangente
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

Fonte: Bianchini (2006, p. 159).

As Figuras 4 e 5 permitem visualizar as semelhanças na abordagem utilizada pelos autores de livros didáticos para determinar as razões trigonométricas no triângulo

retângulo dos ângulos de 30° e 60° . De modo geral, para realizar essa demonstração, os livros pesquisados utilizam o triângulo equilátero para contextualizar geometricamente a situação, bem como aplicar a fórmula da altura do triângulo equilátero como parte integrante na resolução.

Além da dedução dos ângulos, outra estratégia utilizada para finalizar esse tópico nos livros didáticos é a apresentação da tabela dos ângulos notáveis. Alguns autores constroem a tabela ao mesmo tempo em que apresentam as deduções dos ângulos, fazendo a constituição da tabela ângulo por ângulo e, no final, apresentam a tabela completa.

Álvaro Andrini (2015), inicia a dedução dos ângulos notáveis com os ângulos de 45° e 60° , propondo que os alunos, em dupla, desenvolvam o ângulo notável que está faltando, no caso, o ângulo de 30° , tal situação é representada na Figura 6 a seguir.

Figura 6 – Quadro contendo ângulos notáveis para que o aluno possa completar

ângulo	sen		cos		tg	
30°						
45°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1
60°		$\frac{\sqrt{3}}{2}$		$\frac{1}{2}$		$\sqrt{3}$

Fonte: Andrini (2015, p. 217).

Na Figura 6, por se tratar do livro do professor, na parte referente ao ângulo de 45° , encontram-se na cor azul os valores para seno (sen), cosseno (cos) e tangente (tg) do ângulo de 30° . Com essa proposta, o autor faz com que o aluno participe das deduções, podendo observar os exemplos desenvolvidos, consultar o colega, consultar o professor e acompanhar a correção do professor, ou seja, torna-se desafiador.

Outros autores, como Joamir Souza e Jaqueline Garcia (2017), apresentam todas as deduções de todos os ângulos notáveis, porém o livro não contém a tabela dos ângulos notáveis. Nesse sentido, propõem a construção da tabela como uma sugestão didática, apresentada no livro do professor, para que os alunos construam a tabela após as deduções. Tal fato, proposto no livro didático, pode ser observado na Figura 7 a seguir.

Figura 7 – Ângulos notáveis apresentada no livro do professor

Sugira aos alunos que organizem, no caderno, os resultados obtidos, conforme segue:

	30°	45°	60°
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Fonte: Souza; Garcia (2017, p. 248).

Nesse caso, esses autores abordam e apresentam todas as deduções dos ângulos notáveis, porém, ao contrário de outros autores, eles não mantêm essas tabelas nos livros dos alunos. Essa é uma particularidade desses autores, pois a maioria dos autores, ao desenvolver a dedução dos ângulos notáveis, disponibilizam no final a tabela dos ângulos notáveis como representada na Figura 5.

Quanto ao uso desse quadro, como ilustrado na Figura 7, Celso e Ferreira (2015, p. 4) ressaltam a importância de utilizar os ângulos notáveis: “Em razão da extensa aplicação desses ângulos na Física, na Química e na Matemática, essas razões são utilizadas frequentemente na sua forma fracionária, e para os demais ângulos, os dados são comumente fornecidos na sua forma decimal”.

Desse modo, torna-se imprescindível utilizar esses valores de razões trigonométricas de ângulos notáveis, cabendo ao professor ser um mediador e estimular o aluno a utilizar adequadamente os valores da tabela de ângulos notáveis no cotidiano. Esses

valores notáveis também são importantes na aplicação de situações-problemas, de forma que os alunos possam perceber no próprio cotidiano a aplicação desse conteúdo.

4.2 CÁLCULO DE ALTURA CUJA BASE É INACESSÍVEL

Este tópico dedica-se a analisar como os livros didáticos explicam a variação de ângulos para que seja possível calcular a altura de objetos cuja distância até a base é inacessível.

Os dados desta pesquisa apontam que, desde as primeiras ideias dos compêndios até as últimas edições lançadas desses materiais em 2017, a abordagem didática das explicações sobre a variação entre ângulos para determinar a altura de objetos cuja base é inacessível passou por significativas mudanças na abordagem ou na forma de apresentação que consta nos livros.

A Tabela 2 a seguir representa a quantidade de materiais pesquisados por período e a abordagem utilizada, especificamente, em relação à variação de ângulos dentro do conteúdo de trigonometria.

Tabela 2 – Metodologia utilizada para demonstração da variação de ângulos

PERÍODOS	QUANTIDADES	ABORDAGENS
1929 a 1950	0	Não houve abordagem
Década de 1950	1	Lei Geral
Década de 1960	2	Lei Geral
Década de 1970	1	Lei Geral
Década de 1970	1	Sistema
Década de 1980	3	Sistema
Década de 1990	1	Sistema
A partir de 2000	5	Propriedades dos Triângulos
2017	1	Sistema
TOTAL	15	

Fonte: Pesquisador, 2018.

A Tabela 2 mostra que, inicialmente, o conteúdo variação entre ângulos notáveis somente começou a integrar os conteúdos dos materiais na década de 50, estando ausente dos livros até então. Já, durante as décadas de 50, 60 e 70, a abordagem dada à variação entre ângulos notáveis foi feita pela Lei Geral, nessa situação, é abordada pela Lei do Seno. No final da década de 70 até a década de 90, o método apresentado envolvia o Sistema de Equações. Por fim, a partir de 2000, o procedimento para resolução demonstrado era feito por meio das Propriedades do Triângulo, porém uma edição em 2017 retoma a explanação por meio de Sistema de Equações.

As explicações contidas nos livros por meio de dedução trigonométrica utilizavam a Lei do Seno ou até mesmo o uso da razão trigonométrica Tangente (aqui denominada de Lei Geral), outra explicação observada refere-se à aplicação das propriedades dos triângulos e utilização por meio de Sistema de Equações.

Dos livros que abordam a variação entre ângulos para determinar a altura de objetos cuja base é inacessível, percebe-se que 27% dos livros abordam a resolução desses problemas por meio da Lei Geral, 33% por meio das propriedades dos triângulos e 40% das resoluções utilizam a resolução de sistemas de equações.

Cada uma dessas formas de resolução será apresentada a seguir por meio de demonstração concreta de cada uma das formas utilizadas pelos autores para resolver e exemplificar as resoluções.

4.2.1 Explicação Didática pela Lei Geral

O período desse modelo didático é identificado na pesquisa pelas décadas de 50, 60 e 70, nos livros didáticos dos autores Sérgio Sonino (1958, p. 162), Carlos Galante e Antonio de Souza Teixeira Jr. (1965, p. 171), Luiz Mauro Rocha, Ruy Madsen Barbsa, Scipione Di Pierro Neto (1967, p. 206), Fernando Trotta, Luiz Márcio Pereira Imenes e José Jakubovic (1979, p. 193). Esses livros apresentam a resolução utilizando a fórmula geral para determinar a altura de objetos cuja base é inacessível por meio da variação entre ângulos.

Para esclarecer e explicar a variação dos ângulos por meio da Lei Geral as Figuras 8 e 9 trazem um exemplo de problema e ilustrações com essa abordagem.

Figura 8 – Dedução por meio da Lei Geral na década de 60

Problema II: *Determinar a altura de uma torre de base inacessível, situada em terreno horizontal.*

Na parte do terreno acessível ao observador toma-se a distância $AC = a$, que esteja em linha reta com o ponto P, base da torre. Em seguida, medem-se os ângulos α e β .

No triângulo ACB são conhecidos:

a distância $\overline{AC} = a$
e os ângulos

$$\hat{\beta}, \hat{ACB} = 180^\circ - \alpha \quad \text{e} \quad \hat{ABC} = \alpha - \beta,$$

este último, como consequência de ser a soma dos ângulos internos de um triângulo igual a 180° .

De fato, devendo ser

$$\hat{\beta} + 180^\circ - \alpha + \hat{ABC} = 180^\circ \therefore \hat{ABC} = \alpha - \beta.$$

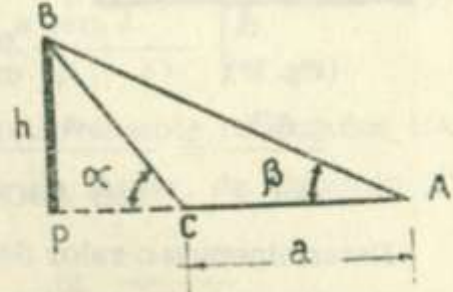
Aplicando ao triângulo ABC o teorema dos senos, temos:

$$\frac{BC}{\sin \beta} = \frac{a}{\sin (\alpha - \beta)} \therefore BC = \frac{a \sin \beta}{\sin (\alpha - \beta)} \quad (1)$$

Do triângulo retângulo BPC temos que:

$$h = BC \sin \alpha$$

Substituindo nesta última relação o valor BC expresso pela relação (1) teremos:

$$h = \frac{a \sin \alpha \sin \beta}{\sin (\alpha - \beta)}$$


(Fig. 78)

Fonte: Galante; Teixeira (1965, p. 171-172).

No problema apresentado na Figura 8, a proposta dos autores é utilizar a dedução de uma Lei Geral aplicando a Lei do Seno para resolver uma situação-problema dada no início. Tal proposta também é utilizada por outros autores, conforme consta na Figura 9 a seguir.

Figura 9 – Dedução por meio da Lei Geral em situação-problema na década de 60.

Caso b) Extremidade inacessível

Mede-se $BB' = d$ e fazem-se duas visadas, B e B'.

$$\frac{b}{c} = \operatorname{tg} B \Rightarrow c = \frac{b}{\operatorname{tg} B}$$

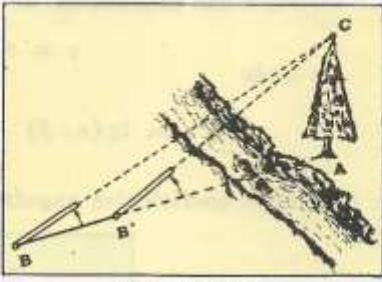
$$\frac{b}{c'} = \operatorname{tg} B' \Rightarrow c' = \frac{b}{\operatorname{tg} B'}$$


FIGURA 174

$$\Rightarrow d = \frac{b}{\operatorname{tg} B} - \frac{b}{\operatorname{tg} B'} \Rightarrow \boxed{b = \frac{d (\operatorname{tg} B \operatorname{tg} B')}{\operatorname{tg} B' - \operatorname{tg} B}}$$

Ilustração:

De um ponto B visou-se o cume de uma montanha sob o ângulo de 30° e de um ponto B', aproximando-se 40 m da montanha, visou-se sob o ângulo de 35° .

$$b = 40 \cdot \frac{\operatorname{tg} 30^\circ \cdot \operatorname{tg} 35^\circ}{\operatorname{tg} 35^\circ - \operatorname{tg} 30^\circ} = 40 \cdot \frac{0,5774 \cdot 0,7002}{0,7002 - 0,5774} \approx 131 \text{ m.}$$

Fonte: Rocha; Barbosa; Pierro Neto (1967, p. 206)

A explicação dada por Galante e Teixeira (1965), representada na Figura 8, difere da explicação de Rocha, Barbosa e Pierro Neto (1967), ora representada na Figura 9, pois, enquanto um utilizou a razão trigonométrica Seno, o outro utilizou a da Tangente.

Em todos os quatros livros analisados, que demonstram a variação de ângulos e utilizam a Lei Geral, observou-se a preocupação dos autores para conseguir abordar o tema utilizando os conteúdos preliminares, explicados em capítulos anteriores. Em todos os casos o tema foi introduzido nos materiais pesquisados após a explicação dos seguintes conteúdos: circunferência, funções trigonométricas e sistemas de equações.

Desde então essas deduções e propostas de resoluções não foram mais publicadas nos livros didáticos. Há indícios de que o nível de complexidade elevado desse modelo de resolução, devido à utilização de operações com várias casas decimais, bem como a compreensão algébrica e trigonométrica necessária, dificulta a compreensão por quem não detém tais habilidades de cálculos.

4.2.2 Explicação didática por Sistema de Equações

Na década de 70 ocorreu uma transição do modelo apresentado nos materiais didáticos, se por um lado as deduções eram complexas, por outro deveriam ser desenvolvidas formas mais simples para resolver situações-problemas envolvendo variação entre ângulos. Nesse contexto, alguns autores propuseram utilizar o Sistema de Equações para que fosse possível o cálculo de altura de objetos cuja base é inacessível.

Observa-se o uso desse método em cinco livros das décadas de 70, 80 e 90, de autoria de: José Luiz Pereira Sampaio, Nilton Lapa e Sidney Luiz Cavalcante (1977); Antar Neto (1984); Antonio dos Santos Machados (1986); José Carlos Teixeira, Vicenzo Bongiovanni, Roberto Benedicto (1988); e Antonio dos Santos Machado (1996).

Figura 10 – Utilização de Sistema de Equações na variação de ângulos

d) Desejando determinar a que altura h do chão está o galho mais alto da árvore situada sobre a colina (Fig. 35.7), uma pessoa mediu os ângulos sob os quais o galho pode ser visto de dois pontos A e B, encontrando 26° e 34° . A distância d entre os dois pontos é de 10 m. Observando o triângulo AMP, podemos escrever: $\frac{h}{d+x} = \text{tg } 26^\circ = 0,4877$ e, no triângulo retângulo BMP, temos: $\frac{h}{x} = \text{tg } 34^\circ = 0,6745$.

Da primeira tiramos $h = (10 + x) \cdot (0,4877)$ e da segunda, $h = x \cdot (0,6745)$. Assim,

$$(10 + x) \cdot (0,4877) = x \cdot (0,6745)$$

ou $4,877 + x \cdot (0,4877) = x \cdot (0,6745)$

$$x \cdot (0,6745) - x \cdot (0,4877) = 4,877$$

$$x \cdot (0,1868) = 4,877$$

e, finalmente, $x \cong 26,1$ m.

Então, $h = x \cdot (0,6745) = (26,1) \cdot (0,6745)$ isto é,
 $h \cong 17,6$ m

Fig. 35.7

Fonte: Sampaio; Lapa; Cavallante (1977, p. 173).

Figura 11 – Utilização de Sistema de Equações na variação de ângulos

A.5 Na figura ao lado, h representa a altura de um poste e ℓ representa a largura de uma rua. Calcule h e ℓ adotando que $\sqrt{3} = 1,7$.

Resolução:

No triângulo ABC, temos

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3} = \frac{h}{\ell}.$$

Logo, $h = \ell \sqrt{3}$ (I)

No triângulo ABD, temos $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{h}{\ell + 10}$

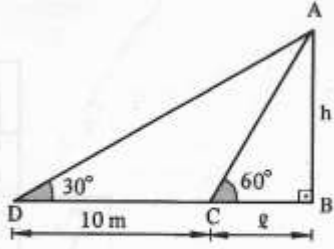
Como $h = \ell \sqrt{3}$, essa igualdade fica:

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\ell \sqrt{3}}{\ell + 10} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{\ell}{\ell + 10} \Rightarrow 3\ell = \ell + 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\ell = 10 \Rightarrow \ell = 5 \text{ m}$$

Substituindo em (I): $h = \ell \sqrt{3} = 5 \sqrt{3} = 5 \cdot 1,7$

Logo, $h = 8,5 \text{ m}$



Fonte: Antar Neto (1984, p. 104).

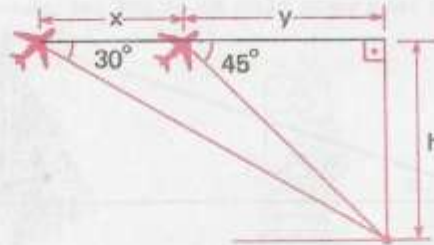
As Figuras 10 e 11 detalham a resolução de alturas com variação de ângulos por meio de Sistema de Equações. Nas duas propostas de resoluções observou-se o sequenciamento didático utilizado nos livros escolares, em outras palavras, a importância de deter conhecimento sobre o conteúdo de anos/séries anteriores para obter êxito nos conteúdos posteriores e/ou em que são pré-requisitos.

Percebeu-se, no material pesquisado, a utilização do conteúdo de séries anteriores (Sistemas de Equações) como método para resolver a situação. Nas explicações apresentadas extraem-se as raízes; por sua vez, ao observar a obra de Teixeira et al. (1988), fica evidente que ele utiliza o Sistema de Equações, apresenta para resolvê-la o conhecimento de racionalização, e também desenvolve o sistema até o fim, mantendo o radical intacto, sem aproximações.

A Figura 12, ilustrada a seguir, contém o desenvolvimento de Teixeira et al. (1988) utilizando o Sistema de Equações e mantendo as raízes.

Figura 12 – Sistema de Equação e Raízes na Variação de ângulos

- 6) O piloto de um avião localiza, por meio de seu radar, um objeto na Terra que forma um ângulo de 30° com a horizontal. Passados 2,5 segundos, o avião nota que este ângulo passa a ter 45° . Determinar a que altura (constante) está o avião, sabendo que sua velocidade (também constante) é de 1 440 km/h (400 m/s).

**Solução:**

De acordo com a figura, temos $x = (2,5) \cdot (400) = 1\,000$ m e:

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{h}{x+y} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{h}{1\,000+y} \quad (1)$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{h}{y} \Rightarrow 1 = \frac{h}{y} \therefore y = h \quad (2)$$

Substituindo (2) em (1), temos:

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{h}{1\,000+h}$$

$$\text{Daí: } 3h = 1\,000\sqrt{3} + \sqrt{3}h \Rightarrow 3h - \sqrt{3}h = 1\,000\sqrt{3} \therefore$$

$$\therefore h(3 - \sqrt{3}) = 1\,000\sqrt{3} \therefore h = \frac{1\,000\sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}}$$

Se quisermos um valor aproximado de h , obteremos:

$$h = \frac{1\,000\sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} \times \frac{3 + \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} = \frac{1\,000(3\sqrt{3} + 3)}{6} =$$

$$= 500(\sqrt{3} + 1) \therefore h \approx (500) \cdot (2,7) \therefore h \approx 1\,350 \text{ m}$$

Fonte: Teixeira et al. (1988, p. 17-18).

Teixeira et al. (1988) propuseram desenvolver o trabalho com as raízes, inclusive o processo de racionalização. Além disso, os autores optaram para, após obter os resultados, utilizar a opção de substituir os valores numéricos aproximados das raízes não exatas, de tal modo que os alunos pudessem comparar os resultados obtidos com e sem usar raízes próximas.

Apesar de ser uma das principais estratégias dos docentes para explicar esse conteúdo, a variação dos ângulos notáveis esteve ausente dos livros didáticos analisados após o ano de 2000, porém uma das obras de 2017 voltou a abordar a utilização do método como uma das soluções desse tipo de situações-problemas.

4.2.3 Explicação didática pelas Propriedades do Triângulo

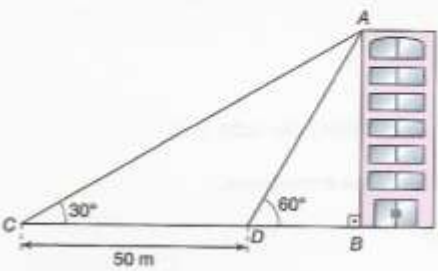
Nos livros didáticos analisados, a abordagem utilizada após o ano 2000 envolve as propriedades dos triângulos para resolver problemas e as situações-problemas utilizando esse método.

Nesse sentido, as obras que contêm esse procedimento são de autoria de: Benigno Barreto Filho e Cláudio Xavier da Silva (2003); Benigno Barreto Filho e Cláudio Xavier da Silva (2005); Fábio Martins de Leonardo (2013); Manoel Paiva (2013); Joamir Souza e Jaqueline Garcia (2016). A Figura 13 a seguir mostra o exemplo do livro do autor Manoel Paiva (2013).

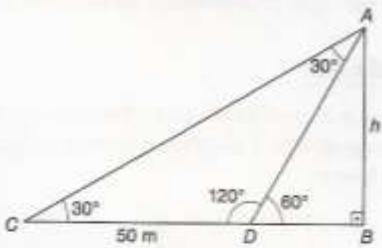
Figura 13 – Sistema de Equações e Raízes na variação de ângulos.

A base de um edifício está localizada em um terreno plano e horizontal. Para medir a altura desse edifício, um engenheiro fixou-se em um ponto do terreno e mirou o topo do prédio sob um ângulo de 30° com o solo. Depois, andou 50 metros em direção ao prédio e mirou novamente seu topo, mas, agora, sob um ângulo de 60° . Desconsiderando a altura do engenheiro, calcular a altura do edifício.

Resolução
Primeiro vamos fazer um esquema da situação:



Indicando por h a altura do edifício, calculamos as medidas dos ângulos internos do triângulo ACD :



O triângulo ACD é isósceles, pois tem dois ângulos internos congruentes (30°); logo, os lados opostos a esses ângulos são congruentes, isto é:

$$DA = DC = 50 \text{ m}$$

Assim, do triângulo ABD , temos:

- ângulo agudo (60°);
- hipotenusa (50 m);
- cateto oposto (h).

Relacionando esses valores através do seno de 60° , concluímos que:

$$\text{sen } 60^\circ = \frac{h}{50} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{50}$$

$$\therefore 2h = 50\sqrt{3}$$

$$\therefore h = 25\sqrt{3}$$

Portanto, a altura do edifício é $25\sqrt{3}$ m, ou seja, aproximadamente 43,3 m.

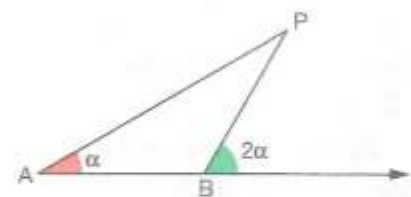
Fonte: Paiva (2013, p. 14).

A Figura 13 retrata a variação por ângulo notável relacionada à percepção das propriedades dos triângulos. Nessa situação, o autor mantém os radicais até o fim, comparando-os com o valor aproximado se substituir por uma raiz aproximada.

Outros autores também utilizam as propriedades dos triângulos para apresentar sugestões de resoluções de alturas com variação de ângulos. As Figuras 14 e 15 a seguir ilustram tais demonstrações.

Figura 14 – Propriedades dos triângulos aplicadas na variação entre ângulos.

(Enem-MEC) Para determinar a distância de um barco até a praia, um navegante utilizou o seguinte procedimento: a partir de um ponto A , mediu o ângulo visual α fazendo mira em um ponto fixo P da praia. Mantendo o barco no mesmo sentido, ele seguiu até um ponto B de modo que fosse possível ver o mesmo ponto P da praia, no entanto sob um ângulo visual 2α . A figura ilustra essa situação.

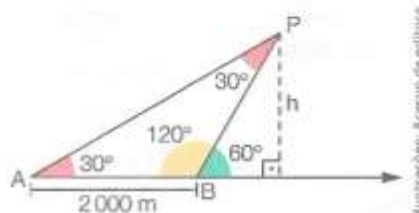


Suponha que o navegante tenha medido o ângulo $\alpha = 30^\circ$ e, ao chegar ao ponto B , verificou que o barco havia percorrido a distância $AB = 2\,000$ m. Com base nesses dados e mantendo a mesma trajetória, a menor distância do barco até o ponto fixo P será:

- a) $1\,000$ m b) $1\,000\sqrt{3}$ m c) $2\,000\frac{\sqrt{3}}{3}$ m d) $2\,000$ m e) $2\,000\sqrt{3}$ m

Resolução

A menor distância do barco até o ponto P corresponde à altura h do triângulo ABP relativa ao lado \overline{AB} , como indicado na figura.



Observe que $\text{med}(\widehat{ABP}) = 120^\circ$, pois \widehat{ABP} é suplementar ao ângulo de medida $2\alpha = 60^\circ$, e $\text{med}(\widehat{APB}) = 30^\circ$, pois a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° . Como $\text{med}(\widehat{BAP}) = \text{med}(\widehat{APB})$, o triângulo ABP é isósceles. Então $BP = AB = 2\,000$ m. Segue que:

$$\text{sen}60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{2\,000} \Rightarrow h = 1\,000\sqrt{3}$$

Logo, a menor distância do barco até o ponto fixo P é $1\,000\sqrt{3}$ m.

Portanto, a alternativa correta é a b.

Souza e Garcia (2016) destacam na Figura 14 a resolução de uma situação-problema que foi proposta no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), sendo utilizado as propriedades dos triângulos para que seja possível solucionar a situação propostas. Paiva desenvolve a mesma linha de raciocínio e utiliza a mesma metodologia para resolver uma outra situação exposta em seu livro, representada na Figura 15.

Figura 15 – Propriedades dos triângulos aplicadas na variação entre ângulos.

Uma pequena árvore, cuja altura está representada por x , ao ser replantada, foi escorada por duas vigas de madeira, como mostra o esquema. Determinar as medidas x e y .

► **Resolução**

Analisando o triângulo ABC , podemos usar a tangente de 30° , pois ela relaciona a medida x (cateto oposto ao ângulo de 30°) com a medida $y + 2$ (cateto adjacente ao ângulo de 30°):

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{x}{y + 2} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{x}{y + 2} \Rightarrow x = \frac{y\sqrt{3} + 2\sqrt{3}}{3} \quad (I)$$

Observando agora o triângulo ABD , podemos usar a tangente de 60° , pois ela relaciona a medida x (cateto oposto ao ângulo de 60°) com a medida y (cateto adjacente ao ângulo de 60°):

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{x}{y} = \sqrt{3} = \frac{x}{y} \Rightarrow x = y\sqrt{3} \quad (II)$$

Substituindo (II) em (I), obtemos $y\sqrt{3} = \frac{y\sqrt{3} + 2\sqrt{3}}{3}$. Daí: $y = 1$
 Como $x = y\sqrt{3}$, temos: $x = \sqrt{3}$
 Assim, $x = \sqrt{3}$ m e $y = 1$ m.

Reflita
 Usando o fato de que o triângulo ADC é isósceles, resolva o exercício R3 de uma maneira diferente da que foi apresentada.

$\operatorname{sen} 60^\circ = \frac{x}{2} \Rightarrow x = \sqrt{3}$ m
 $\operatorname{cos} 60^\circ = \frac{y}{2} \Rightarrow y = 1$ m

Registre as respostas em seu caderno

Fonte: Paiva (2013, p. 264-265).

As Figuras 14 e 15 apresentadas anteriormente contêm a aplicação das propriedades dos triângulos isósceles para determinar a altura de objetivos cuja base é inacessível por meio da variação entre ângulos. Essa forma de representar o modelo matemático da situação-problema pode fazer com que, ao observar a propriedade do triângulo isósceles, o cálculo seja simplificado, pois será aplicada não mais a variação de ângulos, e sim apenas a trigonometria no triângulo retângulo.

5 PRODUTO EDUCACIONAL: PROPOSTA DE DEDUÇÕES

Como resultado da pesquisa, algumas possibilidades se apresentaram, culminando com o produto que ora apresentamos. As deduções apresentadas neste estudo compõem este produto educacional, que disponibilizamos aos professores de Matemática como possibilidade de abordagem em sala de aula.

Está dividido em duas partes importantes para que seja possível compreender as deduções de forma ampla e completa. Inicia apresentando uma situação-problema de aferição de alturas de objetos em distâncias inacessíveis à base e conceituação dos termos utilizados neste estudo. Outros três tópicos virão em seguida contemplando as deduções propostas para as variações com ângulos notáveis.

5.1 CONCEITOS INICIAIS E APLICABILIDADE

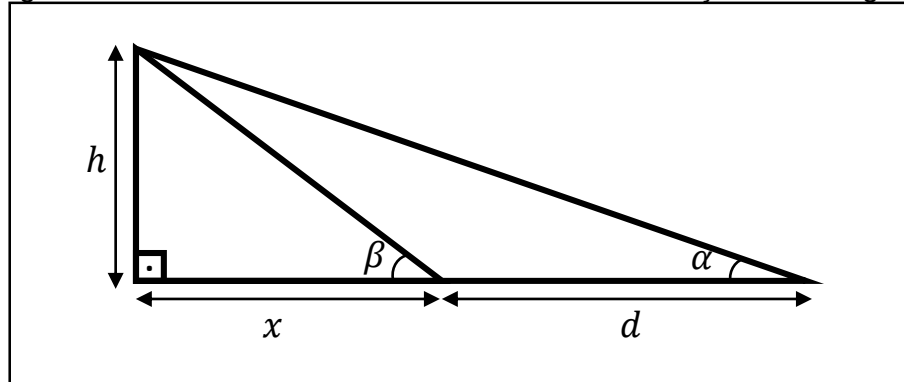
Antes de apresentar as deduções propostas é necessário propor uma situação-problema, de forma que seja possível compreender melhor sua aplicabilidade, bem como obter a compreensão espacial dos temas abordados.

Para tanto o pensamento precisa estar focado em aferir a altura de algum objeto (torre, árvore, prédio, parede, escada, caixa-d'água, entre outros); tal objeto deve ser perpendicular (que se intercepta em um ângulo reto – 90°) em uma superfície plana, conforme modelo matemático demonstrado na Figura 15. Assim, esse objeto deve ser posicionado de tal forma que sua base esteja inacessível (pode ser um lago em volta de uma torre, um muro que protege um prédio, uma árvore dentro de um lote com animais protegendo o perímetro, entre outros).

Em uma situação como essa, para que seja possível aferir a altura do objeto é necessário, então, fazer a aferição do ângulo de observação por duas vezes e calcular a distância que se afasta entre um ponto de observação do objeto até o segundo ângulo de observação para o mesmo objeto, formando, obrigatoriamente, dois ângulos distintos.

Ciente dessa situação, o próximo passo é construir o modelo matemático que representa toda a situação-problema por meio de um desenho com segmentos de retas, ângulos e distâncias aferidas. A Figura 15 a seguir contém um exemplo de um modelo matemático.

Figura 16 – Modelo Matemático demonstrando a variação entre ângulos



Fonte: Pesquisador, 2018.

A Figura 15 contém a letra “ h ” representando a altura do objeto a ser aferida. A letra “ x ” corresponde à distância inacessível, distância essa que não é possível aferir por meios comuns. A letra “ d ” equivale à distância entre os ângulos aferidos. No modelo, é a distância entre o ângulo β ao ângulo α . O ângulo β é um ângulo notável, e o ângulo α é um ângulo notável diferente de β .

5.2 PROPOSTAS DE DEDUÇÕES COM ÂNGULOS NOTÁVEIS

As propostas de deduções com ângulos notáveis deverão ser feitas por meio desse modelo matemático, fundamentado nos conceitos apresentados anteriormente, nas razões trigonométricas e na tabela de ângulos notáveis.

5.2.1 Dedução com afastamento entre os ângulos de 60° e 45°

Na Figura 16, considerando-se os ângulos β e α , respectivamente com valor de 60° e 45°, apresenta-se a seguinte proposta de dedução:

Calculando Tg de 60°

$$\text{Tg } 60^\circ = \frac{h}{x}$$

$$\sqrt{3} = \frac{h}{x}$$

$$x = \frac{h}{\sqrt{3}} \quad (\text{Primeira Equação})$$

Calculando Tg de 45°

$$\text{Tg } 45^\circ = 1$$

$$\text{Tg } 45^\circ = \frac{h}{d+x}$$

$$1 = \frac{h}{d+x}$$

$$d+x = h \quad (\text{Segunda Equação})$$

Substituindo a Primeira Equação na Segunda Equação, temos:

$$d + \frac{h}{\sqrt{3}} = h$$

$$d = h - \frac{h}{\sqrt{3}}$$

$$h - \frac{h}{\sqrt{3}} = d$$

$$\frac{h(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}} = d$$

$$h(\sqrt{3}-1) = d\sqrt{3}$$

$$h(\sqrt{3}-1) = d\sqrt{3}$$

$$h = \frac{d\sqrt{3}}{(\sqrt{3}-1)}$$

$$h = \frac{d\sqrt{3}}{(\sqrt{3}-1)} \cdot \frac{(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}+1)}$$

$$h = \frac{d\sqrt{9}}{\sqrt{9}-1} + \frac{d\sqrt{3}}{\sqrt{9}-1}$$

$$h = \frac{d3}{3-1} + \frac{d\sqrt{3}}{3-1}$$

$$h = \frac{d3}{3-1} + \frac{d\sqrt{3}}{3-1}$$

Logo, temos que:

$$h = \frac{d3}{2} + \frac{d\sqrt{3}}{2}$$

5.2.2 Dedução com afastamento entre os ângulos de 45° e 30°

Na Figura 16, considerando-se os ângulos β e α , respectivamente com valor de 45° e 30°, apresenta-se a seguinte proposta de dedução:

Calculando Tg de 30°

$$\text{Tg } 30^\circ = \frac{C.O}{C.A}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{h}{d+x}$$

$$\frac{(d+x)\sqrt{3}}{3} = h \quad (\text{Primeira Equação})$$

Calculando Tg de 45°

$$\text{Tg } 45^\circ = 1$$

$$\text{Logo } x = h \quad (\text{Segunda Equação})$$

Substituindo a Segunda Equação na Primeira Equação, temos:

$$\frac{(d+h)\sqrt{3}}{3} = h$$

$$(d+h)\sqrt{3} = 3h$$

$$d\sqrt{3} + h\sqrt{3} = 3h$$

$$d\sqrt{3} = 3h - h\sqrt{3}$$

$$d\sqrt{3} = h(3 - \sqrt{3})$$

$$\frac{d\sqrt{3}}{(3 - \sqrt{3})} = h$$

$$\frac{d\sqrt{3}}{(3 - \sqrt{3})} \cdot \frac{(3 + \sqrt{3})}{(3 + \sqrt{3})} = h$$

$$\frac{3d\sqrt{3}}{9 - \sqrt{9}} + \frac{d\sqrt{9}}{9 - \sqrt{9}} = h$$

$$\frac{3d\sqrt{3}}{9 - 3} + \frac{3d}{9 - 3} = h$$

$$\frac{3d\sqrt{3}}{6} + \frac{3d}{6} = h$$

$$\frac{d\sqrt{3}}{2} + \frac{d}{2} = h$$

$$\text{Logo, } h = \frac{d}{2} + \frac{d\sqrt{3}}{2}$$

5.2.3 Dedução com afastamento entre os ângulos de 60° e 30°

Na Figura 16, considerando-se os ângulos β e α , respectivamente com valor de 60° e 30°, apresenta-se a seguinte proposta de dedução:

Calculando Tg de 30°

$$Tg 30^\circ = \frac{C.O}{C.A}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{h}{d+x}$$

$$\frac{(d+x)\sqrt{3}}{3} = h \quad (\text{Primeira Equação})$$

Calculando Tg de 60°

$$Tg 60^\circ = \frac{h}{x}$$

$$\sqrt{3} = \frac{h}{x}$$

$$x = \frac{h}{\sqrt{3}} \quad (\text{Segunda Equação})$$

Substituindo a Segunda Equação na Primeira Equação, temos:

$$\frac{\left(d + \frac{h}{\sqrt{3}}\right)\sqrt{3}}{3} = h$$

$$\frac{d\sqrt{3} + \frac{h\sqrt{3}}{\sqrt{3}}}{3} = h$$

$$d\sqrt{3} + h = 3h$$

$$d\sqrt{3} = 3h - h$$

$$d\sqrt{3} = 2h$$

Logo:

$$\frac{d\sqrt{3}}{2} = h$$

Apresentamos a seguir o Quadro 1, resultante das deduções propostas, sendo, portanto, o resumo das mesmas.

Quadro 1 – Resumo das deduções para determinar altura por meio da variação de ângulos notáveis

VARIAÇÃO	DEDUÇÃO FINAL
60° para 30°	$h = \frac{d\sqrt{3}}{2}$
60° para 45°	$h = \frac{d3}{2} + \frac{d\sqrt{3}}{2}$
45° para 30°	$h = \frac{d}{2} + \frac{d\sqrt{3}}{2}$

Fonte: Pesquisador, 2018.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo dos anos, os livros didáticos têm sido de fato uma das fontes mais importantes de pesquisa, visto a discussão proposta neste estudo. Muitas legislações foram criadas e outras passaram por adaptações, de conforme as necessidades de cada tempo histórico vivido pela sociedade com suas características marcantes cravadas nos livros didáticos e na educação como um todo.

Em relação à abordagem da variação entre ângulos no conteúdo de trigonometria no triângulo retângulo não foi diferente. Foi preciso conhecer as evoluções ocorridas nos livros didáticos que abordam esse tema em especial. Para isso e, pela importância de ensinar esse conteúdo para os alunos, a presente pesquisa visou responder ao seguinte questionamento: como os livros didáticos de matemática vêm abordando, ao longo da história, as deduções da altura de objetos, cuja base é inacessível?

Nessa perspectiva, para respondê-lo, a pesquisa apresentou, sem querer exaurir os conteúdos abordados, uma discussão histórica sobre a evolução das pesquisas em livro didático e das leis que regem esse material no Brasil. Por meio do método de pesquisa documental foi feita a organização do material, que foi analisado e, posteriormente, foram feitas análises no conteúdo específico.

As análises evidenciaram que nem sempre as variações entre ângulos notáveis eram abordadas em livros didáticos, havendo uma defasagem de duas décadas, até o início da década de 50, quando, finalmente, essa parte da trigonometria foi abordada.

No que se refere à variação entre ângulos notáveis, na trigonometria do triângulo retângulo, convém ressaltar as três propostas de resolução apresentadas pelos autores em suas obras: a lei geral, o sistema de equações e as propriedades do triângulo.

Esse avanço para ensinar a variação entre ângulos notáveis com essas propostas ocorreu ao longo da segunda metade do século XX e início do século XXI, pois, em

cada um dos períodos, a relação com os conteúdos fundantes, tidos como pré-requisitos, mostra o sequenciamento do conteúdo nos livros didáticos.

Ao comparar as três diferentes formas de resoluções relacionadas à variação de ângulos, constantes nos livros de Matemática ao longo da história, algumas características do método ficam evidentes. Na lei geral havia a necessidade de dominar conhecimentos da lei do seno e do cosseno, o que dificultava bastante a aprendizagem dos alunos e, por não estar em uma sequência didática adequada, essa representação foi eliminada por completo dos livros de Matemática após a década de 70.

A partir da década de 70 foi implantado outro método, o qual aproveitava o conhecimento já assimilado pelo aluno em séries/anos anteriores, demonstrando a existência de uma relação mais harmônica nos livros didáticos de Matemática. Esse método foi substituído no final da década de 90 pelas propriedades do triângulo, retornando novamente em 2017 como proposta de resolução de situação-problema envolvendo variação entre ângulos. A aplicação das propriedades do triângulo torna-se válida somente para situação de variação entre os ângulos de 60° e 30° , em que se observa um triângulo isósceles e, em seguida, aplica-se a razão trigonométrica comumente.

Por sua vez, esta pesquisa propõe possíveis deduções para determinar a altura de objetos cuja distância a base é inacessível utilizando a variação de ângulos notáveis. Devido à importância desse conteúdo para o estudo da Matemática, a proposta apresentada é relevante também para a Educação Matemática, pois, normalmente, o professor de Matemática desenvolve apenas os conteúdos disponibilizados no livro didático. Isso pode fazer com que o aluno aproveite muito pouco o conteúdo, se afaste de outras situações e/ou padrões matemáticos com o mesmo conteúdo, bem como contribui para um rendimento baixo, entre outros.

Por se encontrarem ausentes dos livros, as propostas tornar-se-ão sugestões às editoras de livros didáticos de Matemática para que possam inclui-las em suas edições futuras, de forma a tornar mais prática e compreensível a resolução de problemas que contenham a variação entre ângulos notáveis.

Nesse sentido, esta pesquisa pode contribuir com diversas áreas da Educação, por exemplo, o curso de Licenciatura em Matemática e disciplinas afins podem apresentar na proposta a resolução e o desenvolvimento de tais deduções pelos acadêmicos. O professor de Matemática, ao utilizar esse conteúdo, tem a oportunidade de estimular e incentivar seus alunos nos processos algébricos de uma equação que, muitas vezes, por serem consideradas complexas, tem apenas suas fórmulas ensinadas e nada mais.

Os resultados alcançados pela pesquisa tornam-se, desse modo, um material importante para os professores de Matemática, o qual poderá dar uma nova abordagem ao conteúdo de trigonometria por meio da variação de ângulos notáveis.

Além disso, pelas análises feitas nas explicações, deduções, exemplos, exercícios e, inclusive, figuras, esta pesquisa não somente alcançou o objetivo geral proposto para a área da Matemática, como também comprovou que, até então, as deduções propostas ainda não haviam sido abordadas nos livros didáticos.

A pesquisa não teve o propósito de esgotar os conhecimentos explanados, mas sim estimular o desenvolvimento de futuras pesquisas, que envolvam alguns conteúdos como, por exemplo: dificuldades na trigonometria por falta de domínio algébrico, destacando produtos notáveis, racionalização, fatoração, operações com frações, simplificação algébrica ou numérica de frações. Ao aprender esses conteúdos o aluno terá mais facilidade e estímulo para compreender a trigonometria, pois são as bases essenciais, pré-requisitos necessários para desenvolver os cálculos na resolução das situações-problemas.

O pesquisador pretende dar continuidade a esta pesquisa por meio de trabalhos científicos, livros etc., na temática da pesquisa, bem como também pretende: realizar um estudo para verificar os impactos dessas deduções em alunos com Transtornos de Déficit de Atenção e/ou com Hiperatividade, os impactos dessas deduções nas aulas de trigonometria com os alunos de 9º ano do Ensino Fundamental, no primeiro ano do Ensino Médio e, por sua vez, no Ensino Superior, nas turmas de Engenharia que têm na grade a disciplina Matemática Instrumental.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, E. R. de. **A Autoria e a função-autor no livro didático**. Quaestio - Revista de Estudos em Educação, [S.l.], v. 5, n. 2, p. p. 75-90, fev. 2013. ISSN 2177-5796. Disponível em: <<http://periodicos.uniso.br/ojs/index.php/quaestio/article/view/1364/1349>>. Acesso em: 10 jun. 2018.

ANDRINI, Á. **Praticando Matemática**: 9º Ano. São Paulo: Editora do Brasil, 2012.

BIANCHINI, E. **Matemática Bianchini**: 9º Ano. São Paulo: Moderna, 2006.

BITTENCOURT, C. M. F. **Em foco**: história, produção e memória do livro didático (Apresentação). Educação e Pesquisa (USP), São Paulo, v. 30, n. 3, p. 471- 473, 2004. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/ep/v30n3/a07v30n3.pdf>. Acesso em: 10 jun. 2018.

BORTOLI, G.; MARCHI, M.I.; GIONGO, I. M.. **Uma abordagem histórica no ensino da trigonometria**. Appris, Curitiba, 2016.

BRASIL. M. da E.. **Guia de livros didáticos PNLD 2014**: Matemática. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. Brasília (2013).

_____. Decreto - Lei nº 1.006, de 30 de dezembro de 1938. **Estabelece as condições de produção, importação e utilização do livro didático**. Câmara dos Deputados. Rio de Janeiro, 30 de dezembro de 1938. Disponível em: <<http://www2.camara.leg.br/legin/fed/declei/1930-1939/decreto-lei-1006-30-dezembro-1938-350741-publicacaooriginal-1-pe.html>>. Acesso em: 10 jun. 2018.

_____. M. da E.. **Projeto Livro Acessível**. 2010. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/busca-geral/194-secretarias-112877938/secad-educacao-continuada-23369541/17435-projeto-livro-acessivel-novo>>. Acesso em: 10 jun. 2018.

_____. M. da E.. **Ensino fundamental de escolas rurais terá obras diferenciadas**. 2012. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/busca-geral/194-secretarias-112877938/secad-educacao-continuada-23369541/17435-projeto-livro-acessivel-novo>>. Acesso em: 10 jun. 2018.

_____. M. da E.. **MEC comemora 80 anos dos programas do livro didático e anuncia concurso literário**. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/busca-geral/194-secretarias-112877938/secad-educacao-continuada-23369541/17435-projeto-livro-acessivel-novo>>. Acesso em: 10 jun. 2018.

_____. Decreto nº 59.355, de 4 de outubro de 1966. **Institui no Ministério da Educação e Cultura a Comissão do Livro Técnico e do Livro Didático (COLTED) e revoga o Decreto número 58.653-66**. Câmara dos Deputados. Brasília, 4 de outubro de 1966. Disponível em: <http://www2.camara.leg.br/legin/fed/decret/1960-1969/decreto-59355-4-outubro-1966-400010-publicacaooriginal-1-pe.html>. Acesso em: 10 jun. 2018.

_____. Lei nº 5.327, de 2 de outubro de 1967. **Autoriza o Poder Executivo a instituir a Fundação Nacional de Material Escolar.** Câmara dos Deputados. Brasília, 2 de outubro de 1967. Disponível em: <http://www2.camara.leg.br/legin/fed/lei/1960-1969/lei-5327-2-outubro1967-359134-publicacaooriginal-1-pl.html>. Acesso em: 10 jun. 2018.

_____. Lei nº 7.091, de 18 de abril de 1983. **Altera a denominação da Fundação Nacional de Material Escolar, a que se refere a Lei nº 5.327, de 2 de outubro de 1967, amplia suas finalidades e dá outras providências.** Câmara dos Deputados. Brasília, 18 de abril de 1983. Disponível em: <http://www2.camara.leg.br/legin/fed/lei/1980-1987/lei-7091-18-abril-1983-356755-norma-pl.html>. Acesso em: 10 jun. 2018.

_____. Decreto - Lei nº 91.542, de 19 de agosto 1985. **Institui o Programa Nacional do Livro Didático, dispõe sobre sua execução e dá outras providências.** Câmara dos Deputados. Brasília, 19 de agosto de 1985. Disponível em: <http://www2.camara.leg.br/legin/fed/decret/1980-1987/decreto-91542-19-agosto-1985-441959-publicacaooriginal-1-pe.html>. Acesso em: 10 jun. 2018.

_____. M. da E.. **Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE). Programa Nacional do livro didático.** Histórico. Ministério da Educação. Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação. Brasília, 2013. Disponível em: <http://www.fnde.gov.br/programas/livro-didatico>. Acesso em: 10 jun. 2018.

CARVALHO, J. B. P.; LIMA, P. F. **Escolha e uso do livro didático.** In: Matemática: Ensino Fundamental. João Bosco Pitombeira Fernandes de Carvalho/coord. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2010. (Coleção Explorando o Ensino, v. 17, p. 15- 30). Disponível em: http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=7842-2011-matematica-capa-pdf&category_slug=abril-2011-pdf&Itemid=30192. Acesso em: 10 jun. 2018.

CHOPPIN, A. **História dos livros e das edições didáticas:** sobre o estado da arte. Educação e Pesquisa — FEUSP, São Paulo, v. 30, n. 3, p. 549-566, set./dez. 2004. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/ep/v30n3/a12v30n3.pdf>. Acesso em: 10 jun. 2018.

DANTE, L. R. **Livro didático de matemática:** uso ou abuso? Em Aberto, Brasília, ano 16, n.69, jan./mar. 1996. p. 83-97. Disponível em: <http://emaberto.inep.gov.br/index.php/emaberto/article/view/2068/2037>. Acesso em: 10 jun. 2018.

FILGUEIRAS, J. M. **As avaliações dos livros didáticos na Comissão Nacional do Livro Didático:** a conformação dos saberes escolares nos anos 1940. Rev. bras. hist. educ., Campinas-SP, v. 13, n. 1 (31), p. 159-192, jan./abr. 2013. Disponível em: <http://www.rbhe.sbhe.org.br/index.php/rbhe/article/viewFile/372/354>. Acesso em: 10 jun. 2018.

_____. **Os processos de avaliação de livros didáticos no Brasil**. 2011. 252 f. Tese (Doutorado em Educação: História, Política, Sociedade) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, PUC, São Paulo. 2011. Disponível em: http://www.sapientia.pucsp.br/tde_busca/arquivo.php?codArquivo=12433. Acesso em: 10 jun. 2018.

FOSSA, J. A. (Org.). **Facetas do Diamante**: ensaios sobre educação matemática e história da matemática. Rio Claro: Sociedade Brasileira de História da Matemática, 2000.

GALANTE; C.; TEIXEIRA JR, A. S. **Trigonometria Curso Colegial**. Editora do Brasil, 1965.

GATTI JÚNIOR, D.. **A escrita escolar da História**: livro didático e ensino no Brasil (1970- 1990). Bauru, SP: EDUSC/Belo Horizonte, MG: EDUFU, 2004.

GUERRA, E. L. de A.. **Manual de pesquisa qualitativa**. Belo Horizonte, Centro Universitário UNA, 2014.

LAJOLO, M.. **Livro Didático**: um (quase) manual de usuário. Em Aberto, Brasília, ano 16, n.69, jan./mar. 1996. P. 3-9. Disponível em: <http://emaberto.inep.gov.br/index.php/emaberto/article/view/2061/2030>. Acesso em: 10 jun. 2018.

LOPES, J. de A.. **Livro Didático de Matemática**: Concepção, seleção, e possibilidade frente a descritores de análise e tendências em educação matemática. 2000. 333 f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Estadual de Campinas, São Paulo, 2000. Disponível em: <http://www.bibliotecadigital.unicamp.br/document/?code=vtls000213902>. Acesso em: 10 jun. 2018.

MENDES, I. A.. **A trigonometria e o seu ensino**: alguns fragmentos dessa história. <<http://www.sbhe.org.br/novo/congressos/cbhe2/pdfs/Tema7/0737.pdf>>. Acesso em: 10 jun. 2018.

NETO, A. **Matemática Básica**. São Paulo: Editora Atual, 1984.

PAIVA, M. **Matemática Paiva**. São Paulo: Moderna, 2013.

ROCHA, L. M.; BARBOSA, R. M.; NETO, S. P. **Matemática**: curso colegial moderno. São Paulo: IBEP, 1967.

SAMARA, E. de M.; TUPY, I. S. S.. **História & documentos e metodologia de pesquisa**. Belo Horizonte, Autêntica Editora, 2010.

SAMPAIO, J. L. P.; LAPA, N.; CAVALLANTTE, S. L. **Estudos de Matemática**. São Paulo: Editora Moderna, 1977.

SOARES, M. B. **Um olhar sobre o livro didático**. Presença Pedagógica. v. 2, nº 12, no/dez. 1996.p. 53-63.

SOUZA, J. **Novo olhar Matemática**. São Paulo: FTD, 2013.

SOUZA, J.; GARCIA, J. **#Contato Matemática: 1ª Série**. São Paulo: FTD, 2017.

TEIXEIRA, J. C. et al. **Aulas práticas de Matemática: Segundo Grau**. São Paulo: Editora Ática, 1988.

THIENGO, E. R.. **A matemática de Ary Quintella e Osvaldo Sangiorgi: Um estudo comparativo**.

TURÍBIO, S. R. T.. **As mudanças ocorridas no livro didático de matemática e a sua influência na prática pedagógica do professor**. 2015. 151 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado em Educação, PPGEDU/UFMT, Universidade Federal de Mato Grosso, Rondonópolis, 2015. Disponível em: <<http://www.ufmt.br/ufmt/unidade/userfiles/publicacoes/fb1dd59b859f337763c0bb9856170a68.pdf>>. Acesso em: 10 jun. 2018.

APÊNDICES

APÊNDICE A – RELAÇÃO DOS LIVROS PESQUISADOS

ANO	AUTOR(ES)	TÍTULO	EDITORA	Cidade	ACERVO
1903	E. D. de Castro	LIÇÕES DE TRIGONOMETRIA	E. C.	São Paulo	Ghemat
1904	ANTONIO ALVES FERREIRA DA SILVA	ELEMENTOS DE TRIGONOMETRIA RECTILINEA: COM APPLICAÇÕES À TOPOGRAPHIA, HYDROGRAPHIA, GEODESIA E NAVEGAÇÃO	IMPRESA NACIONAL	Rio de Janeiro	PESQ
1917	ANDRÉ PEREZ Y MARIN; CARLOS F. DE PAULA	ELEMENTOS DE TRIGONOMETRIA RECTILINEA E ESPHERICA	EDITORES WEISZFLOG IRMÃOS	São Paulo	PESQ
1927	Ayr Albuquerque; Pedro A. Fleury da Silveira	CALCULO VECTORIAL: ESCOLA POLYTECHNICA DE SÃO PAULO	TYP. BRAZIL DE ROTHSCHILD & CO	São Paulo	Ghemat
1930	T. A. RAMOS	CALCUL VECTORIEL	ALBERT BLANCHARD	Rio de Janeiro	Ghemat
1931	Julio Cesar de Mello e Souza	GEOMETRIA ANALÍTICA	LIVRARIA FRANCISCO ALVES	Rio de Janeiro	Ghemat
1934	D. Polli Coelho	PRIMEIRAS LIÇÕES DE CÁLCULO VECTORIAL	TYP. DO JORNAL DO COMMERCIO RODRIGUES & C	Rio de Janeiro	Ghemat
1936	Miron Resnik	CURSO DE TRIGONOMETRIA: PLANA, ESFÉRICA, Complementos	SARAIVA & CIA	São Paulo	Ghemat
1938	Thales Mello Carvalho	LIÇÕES DE MATEMÁTICA: DE ACÔRDO COM O PROGRAMA DO CURSO COMPLEMENTAR DE ENGENHARIA	CASA MATTOS	Rio de Janeiro	Ghemat
1938	Gumercindo Lima	PONTOS DE MATEMÁTICA: SEGUNDO OS PROGRAMAS DOS CURSOS COMPLEMENTARES	SOC. IMPRESSORA PAULISTA LTDA	São Paulo	Ghemat
1938	Julio Cesar de Mello e Souza	GEOMETRIA ANALÍTICA	LIVRARIA FRANCISCO ALVES	Rio de Janeiro	Ghemat
1938	Roberto José Fontes Peixoto	ELEMENTOS DE CÁLCULO VETORIAL: DE ACORDO COM OS PROGRAMAS DOS CURSOS COMPLEMENTARES	OSCAR MANO & CIA	Rio de Janeiro	Ghemat

Continua...

Continuação...

1938	Roberto José Fontes Peixoto	ELEMENTOS DE GEOMETRIA ANALÍTICA: DE ACORDO COM OS PROGRAMAS DO EXAME VESTIBULAR DA ESCOLA POLITÉCNICA E DOS CURSOS COMPLEMENTARES	OSCAR MANO & CIA	Rio de Janeiro	Ghemat
1939	Haroldo Lisbôa da Cunha	PONTOS DE ÁLGEBRA COMPLEMENTAR: DE ACÔRDO COM O PROGRAMA DE CURSO COMPLEMENTAR	TYPOGRAPHIA ALBA	Rio de Janeiro	Ghemat
1940	Sergio I. Ribeiro Freire; Marcello Menna Barreto	GEOMETRIA ANALÍTICA: SEGUNDO O PROGRAMA DA ESCOLA MILITAR	*****	Rio de Janeiro	Ghemat
1940	Julio Cesar de Mello e Souza	GEOMETRIA ANALÍTICA	LIVRARIA FRANCISCO ALVES	Rio de Janeiro	Ghemat
1940	Roberto José Fontes Peixoto	ELEMENTOS DE CÁLCULO VETORIAL: DE ACORDO COM OS PROGRAMAS DOS CURSOS COMPLEMENTARES	OSCAR MANO & CIA	Rio de Janeiro	Ghemat
1940	DÉCOURT E NADRUZ	MATEMÁTICA	EDIÇÕES MELHORAMENTOS	São Paulo	PESQ
1941	Roberto José Fontes Peixoto	PROBLEMAS DE GEOMETRIA ANALÍTICA: DE DUAS DIMENSÕES	EDITORA MINERVA LTDA	Rio de Janeiro	Ghemat
1941	Alberto Nunes Serrão	LIÇÕES DE MATEMÁTICA PARA MÉDICOS E QUÍMICOS (CURSOS COMPLEMENTARES)	LIVRARIA DO GLOBO	PORTO ALEGRE	Ghemat
1942	J. E. Mendes de Castro; W. A. Maurer	EXERCÍCIOS DE MATEMÁTICA: Curso pré-politécnico	Cruzeiro do Sul	São Paulo	Ghemat
1942	Roberto José Fontes Peixoto	EXERCÍCIOS DE GEOMETRIA ANALÍTICA DE TRÊS DIMENSÕES	EDITORA MINERVA LTDA	Rio de Janeiro	Ghemat
1942	Alberto Nunes Serrão	LIÇÕES DE TRIGONOMETRIA RETILÍNEA E DE CÁLCULO VECTORIAL: PARA OS CURSOS COMPLEMENTARES	EDIÇÕES BOFFONI	PORTO ALEGRE	Ghemat
1942	F. A. LACAZ NETTO	EXERCÍCIOS DE VETORES	EDITORA CLÁSSICO CIENTÍFICA S. A.	São Paulo	Ghemat

Continua...

Continuação...

1942	JACOMO STÁVALE	SEGUNDO ANO DE MATEMÁTICA:	Companhia Editora Nacional	São Paulo	PESQ
1943	Thales Mello Carvalho	MATEMÁTICA: PARA OS CURSOS CLÁSSICOS E CIENTÍFICOS	Companhia Editora Nacional	São Paulo	Ghemat
1943	F. A. LACAZ NETTO	TEORIA ELEMENTAR DOS DETERMINANTES	EDITORA CLÁSSICO CIENTÍFICA S. A.	São Paulo	Ghemat
1943	F. A. LACAZ NETTO	LIÇÕES DE ANÁLISE COMBINATÓRIA	EDITORA CLÁSSICO CIENTÍFICA S. A.	São Paulo	Ghemat
1943	Roberto Peixoto	ELEMENTOS DE CÁLCULO VETORIAL: DE ACORDO COM OS PROGRAMAS DOS CURSOS COMPLEMENTARES	EDITORA MINERVA LTDA	Rio de Janeiro	Ghemat
1944	F. Furquim de Almeida; João B. Castanho; Edson Forah; Benedito Castrucci	MATEMÁTICA	EDITORA DO BRASIL S/A	São Paulo	Ghemat
1944	Thales Mello Carvalho	MATEMÁTICA: PARA OS CURSOS CLÁSSICOS E CIENTÍFICOS	Companhia Editora Nacional	São Paulo	Ghemat
1944	Thales Mello Carvalho	MATEMÁTICA: PARA OS CURSOS CLÁSSICOS E CIENTÍFICOS	Companhia Editora Nacional	São Paulo	Ghemat
1944	F. A. LACAZ NETTO	FÓRMAS E EQUAÇÕES LINEARES	EDITORA DO BRASIL S/A	São Paulo	Ghemat
1944	Euclides Roxo; Roberto Peixoto; Haroldo Cunha; Dacorso Netto	Matemática 2º Ciclo: 2ª Série	LIVRARIA FRANCISCO ALVES	Rio de Janeiro	Ghemat
1944	Sergio Sonnino	ELEMENTOS DE GEOMETRIA ANALÍTICA: COM 450 EXERCÍCIOS	EDITORA CLÁSSICO CIENTÍFICA S. A.	São Paulo	Ghemat
1945	Alberto Nunes Serrão	ANÁLISE ALGÉBRICA	LIVRARIA DO GLOBO	PORTO ALEGRE	Ghemat
1945	Euclides Roxo; Roberto Peixoto; Haroldo Cunha; Dacorso Netto	Matemática 2º Ciclo: 1ª Série	LIVRARIA FRANCISCO ALVES	Rio de Janeiro	Ghemat

Continua...

Continuação...

1946	J. O. Monteiro de Camargo	CÁLCULO VECTORIAL: CURSO DA ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO	EDITORA RENASCÊNCIA S.A.	São Paulo	Ghemat
1946	ALGACYR MUNHOZ MAEDER	CURSO DE MATEMÁTICA: 1º LIVRO DO CICLO COLEGIAL	EDIÇÕES MELHORAMENTOS	São Paulo	Ghemat
1947	ALGACYR MUNHOZ MAEDER	CURSO DE MATEMÁTICA: 2º LIVRO DO COLEGIAL	EDIÇÕES MELHORAMENTOS	São Paulo	PESQ
1948	Thales Mello Carvalho	MATEMÁTICA: PARA OS CURSOS CLÁSSICOS E CIENTÍFICOS	Companhia Editora Nacional	São Paulo	Ghemat
1950	F. A. LACAZ NETTO	LIÇÕES DE ANÁLISE COMBINATÓRIA	EDITORA CLÁSSICO CIENTÍFICA S. A.	São Paulo	Ghemat
1950	Roberto Peixoto	ANÁLISE COMBINATÓRIA, BINÔMIO DE NEWTON, POTÊNCIA DE UM POLINÔMIO	Editora Paulo de Azevedo	Rio de Janeiro	Ghemat
1951	Roberto José Fontes Peixoto	ELEMENTOS DE GEOMETRIA ANALÍTICA: GEOMETRIA DE TRÊS DIMENSÕES	LIVRARIA FRANCISCO ALVES	Rio de Janeiro	Ghemat
1951	Roberto José Fontes Peixoto	ELEMENTOS DE GEOMETRIA ANALÍTICA: GEOMETRIA DE UMA E DUAS DIMENSÕES	LIVRARIA FRANCISCO ALVES	Rio de Janeiro	Ghemat
1951	F. A. LACAZ NETTO	LUGARES GEOMÉTRICOS PLANOS	EDITORA BANDEIRANTES	São Paulo	Ghemat
1951	ALGACYR MUNHOZ MAEDER	CURSO DE MATEMÁTICA: 1º LIVRO DO CICLO COLEGIAL	EDIÇÕES MELHORAMENTOS	São Paulo	Ghemat
1951	ALGACYR MUNHOZ MAEDER	CURSO DE MATEMÁTICA: 2º LIVRO DO CICLO COLEGIAL	EDIÇÕES MELHORAMENTOS	São Paulo	Ghemat
1953	F. A. LACAZ NETTO	NÚMEROS REAIS	EDITORA BANDEIRANTES	São Paulo	Ghemat
1953	W. A. MAURER	LIÇÕES DE GEOMETRIA ANALÍTICA	EDITORA BANDEIRANTES	São Paulo	Ghemat

Continua...

Continuação...

1954	F. A. LACAZ NETTO	TEORIA ELEMENTAR DOS DETERMINANTES	EDITORA CLÁSSICO CIENTÍFICA S. A.	São Paulo	Ghemat
1954	F. A. LACAZ NETTO	TRIGONOMETRIA	EDITORA BANDEIRANTES	São Paulo	Ghemat
1955	BENEDITO CASTRUCCI	LIÇÕES DE GEOMETRIA PLANA	EDITORA BANDEIRANTES	São Paulo	Ghemat
1955	HEBERT F. PINTO	EQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS	EDITORA CIENTÍFICA	Rio de Janeiro	Ghemat
1955	Euclides Roxo; Roberto Peixoto; Haroldo Cunha; Dacorso Netto	MATEMÁTICA: 2º CICLO	Editora Paulo de Azevedo	São Paulo	Ghemat
1955	Euclides Roxo; Roberto Peixoto; Haroldo Cunha; Dacorso Netto	MATEMÁTICA: 2º CICLO	LIVRARIA FRANCISCO ALVES	Rio de Janeiro	PESQ
1956	J. ABDELHAY	MATEMÁTICA: PARA OS CANDIDATOS ÀS ESCOLAS SUPERIORES	EDITORA CIENTÍFICA	Rio de Janeiro	Ghemat
1956	BENEDITO CASTRUCCI	CURSO DE GEOMETRIA ANALÍTICA	EDITORA BANDEIRANTES	São Paulo	Ghemat
1956	HEBERT F. PINTO	PROGRESSÕES	EDITORA CIENTÍFICA	Rio de Janeiro	Ghemat
1956	Euclides Roxo; Roberto Peixoto; Haroldo Cunha; Dacorso Netto	MATEMÁTICA: 2º CICLO	Editora Paulo de Azevedo	São Paulo	Ghemat
1956	Euclides Roxo; Roberto Peixoto; Haroldo Cunha; Dacorso Netto	MATEMÁTICA: 2º CICLO	Editora Paulo de Azevedo	São Paulo	Ghemat
1956	Euclides Roxo; Roberto Peixoto; Haroldo Cunha; Dacorso Netto	MATEMÁTICA: 2º CICLO	Editora Paulo de Azevedo	São Paulo	Ghemat
1957	Thales Mello Carvalho	MATEMÁTICA PARA OS CURSOS CLÁSSICOS E CIENTÍFICOS: PRIMEIRO ANO	Companhia Editora Nacional	São Paulo	Ghemat

Continua...

Continuação...

1957	F. A. LACAZ NETTO	COMPLEMENTOS SOBRE VETORES	LIVRARIA NOBEL S. A.	São Paulo	Ghemat
1958	LUIZ MAURO ROCHA	GEOMETRIA ANALÍTICA	LIVRARIA NOBEL S. A.	São Paulo	Ghemat
1958	SERGIO SONNINO	LIÇÕES DE TRIGONOMETRIA PLANA (COM PROBLEMAS RESOLVIDOS E A RESOLVER)	LIVRARIA NOBEL S. A.	São Paulo	PESQ
1959	ALGACYR MUNHOZ MAEDER	CURSO DE MATEMÁTICA: 3ª SÉRIE DO CICLO COLEGIAL	EDIÇÕES MELHORAMENTOS	São Paulo	Ghemat
1959	Euclides Roxo; Roberto Peixoto; Haroldo Cunha; Dacorso Netto	MATEMÁTICA: 2º CICLO	Editora Paulo de Azevedo	São Paulo	Ghemat
1959	Euclides Roxo; Roberto Peixoto; Haroldo Cunha; Dacorso Netto	MATEMÁTICA: 2º CICLO	Editora Paulo de Azevedo	São Paulo	Ghemat
1960	M. SILVA FILHO	ELEMENTOS DE CALCULO	EDITONA NACIONALISTA	Rio de Janeiro	Ghemat
1960	GIULIO VALERIO	CALCULO COMBINATORIO BONOMIO DE NEWTON	LIVRARIA NOBEL S. A.	São Paulo	Ghemat
1960	GIULIO VALERIO	TEORIA ELEMENTAR DOS DETERMINANTES: SISTEMA LINEARES	LIVRARIA NOBEL S. A.	São Paulo	Ghemat
1960	ALVERCIO MOREIRA GOMES	INTRODUÇÃO À ÁLGEBRA MODERNA	SOCIEDADE EDITORA E GRAFICA LTDA	Rio de Janeiro	Ghemat
1961	SCIPIONE DI PIERRO NETTO	PROGRESSÕES ARITMÉTICAS E GEOMÉTRICAS	*****	São Paulo	Ghemat
1961	BEATRIZ HELENA ALCÂNTARA GOMES	DETERMINANTES FUNCIONAIS	CENTRO DE ESTUDOS DE MATEMÁTICA F.F.C.L. DA U.R.J	Rio de Janeiro	Ghemat
1961	M. SILVA FILHO	GEOMETRIA ANALÍTICA	LIVRARIA EDITORADO TIJUCA	Rio de Janeiro	Ghemat

Continua...

Continuação...

1962	RUY MADSEN BARBOSA	UM CURSO MODERNO ELEMENTAR DE ANÁLISE COMBINATÓRIA	ARARAQUARA	São Paulo	Ghemat
1962	BENEDITO CASTRUCCI	CURSO DE GEOMETRIA ANALÍTICA	LIVRARIA NOBEL S. A.	São Paulo	Ghemat
1962	WALDECYR C. DE ARAÚJO PEREIRA	CURSO MODERNO DE MATEMÁTICA: ARITMÉTICA	SECÇÃO DE MIMEOGRAFIA DO "CURSO ARAÚJO DE MATEMÁTICA"	Recife	Ghemat
1963	BENEDITO CASTRUCCI	CURSO DE GEOMETRIA ANALÍTICA	LIVRARIA NOBEL S. A.	São Paulo	Ghemat
1964	SERGIO SONNINO	TRIGONOMETRIA PLANA	LIVRARIA NOBEL S. A.	São Paulo	Ghemat
1964	BENEDITO CASTRUCCI	LIÇÕES DE GEOMETRIA ELEMENTAR	LIVRARIA NOBEL S. A.	São Paulo	Ghemat
1964	NEWTON J. MONTEIRO	LIÇÕES DE GEOMETRIA ANALÍTICA	CAIRU GRÁFICA	São Paulo	Ghemat
1965	W. A. MAURER	LIÇÕES DE GEOMETRIA ANALÍTICA	LIVRARIA NOBEL S. A.	São Paulo	Ghemat
1965	CARLOS GALANTE; ANTONIO DE SOUZA TEIXEIRA JR.	TRIGONOMETRIA CURSO COLEGIAL	EDITORA DO BRASIL S/A	São Paulo	Ghemat
1965	G.E.E.M - GRUPO DE ESTUDOS DO ENSINO DA MATEMÁTICA	MATEMÁTICA MODERNA PARA O ENSINO SECUNDÁRIO	LPM EDITORA	São Paulo	Ghemat
1965	SCIPIONE DI PIERRO NETTO	GEOMETRIA ANALÍTICA: A RETA, CÔNICAS E LUGARES GEOMÉTRICOS	LPM EDITORA	São Paulo	Ghemat
1966	Deomar Basso; Tulio O. Santos	ÁLGEBRA II: CURSO COLEGIAL	PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RS	PÔRTO ALEGRE	Ghemat
1966	ARY QUINTELLA	MATEMÁTICA PARA O SEGUNDO ANO COLEGIAL	Companhia Editora Nacional	São Paulo	Ghemat

Continua...

Continuação...

1966	LUIZ MAURO ROCHA	GEOMETRIA ANALÍTICA	LIVRARIA NOBEL S. A.	São Paulo	Ghemat
1966	MANOEL JAIRÓ BEZERRA	CURSO DE MATEMÁTICA: PARA OS PRIMEIRO, SEGUNDO E TERCEIRO ANOS DO CURSO CLÁSSICO E CIENTÍFICO	Companhia Editora Nacional	São Paulo	PESQ
1967	MARCOS TULIO ARBEX	INTRODUÇÃO AO CÁLCULO DE PROBABILIDADE	VISCONDE DE CAIRU	São Paulo	Ghemat
1967	RUY MADSEN BARBOSA	GEOMETRIA ANALÍTICA MODERNA (PLANA)	LIVRARIA NOBEL S. A.	São Paulo	Ghemat
1967	ALESIO JOÃO DE CAROLI; CARLOS ALBERTO CALLIOLI; MIGUEL OLIVA FEITOSA	MATRIZES: TEORIA E EXERCÍCIOS PARA O CURSO COLEGIAL E EXAME VESTIBULARES	LPM EDITORA	São Paulo	Ghemat
1967	SCIPIONE DI PIERRO NETTO; LUIZ MAURO ROCHA; RUY MADSEN BARBOSA	MATEMÁTICA: CURSO COLEGIAL MODERNO	IBEP	São Paulo	Ghemat
1967	LUIZ MAURO ROCHA; RUY MADSEN BARBSA; SCIPIONE DI PIERRO NETO	MATEMÁTICA: CURSO COLEGIAL MODERNO	IBEP	São Paulo	PESQ
1968	Manoel Jairo Bezerra	CURSO DE MATEMÁTICA: PARA OS PRIMEIRO, SEGUNDO E TERCEIRO ANOS DOS CURSOS CLÁSSICOS E CIENTÍFICOS	Companhia Editora Nacional	São Paulo	Ghemat
1968	RUY MADSEN BARBOSA	ELEMENTOS DE LÓGICA APLICADA AO ENSINO SECUNDÁRIO	LIVRARIA NOBEL S. A.	São Paulo	Ghemat
1968	Manoel Jairo Bezerra	MODERNO CURSO DE MATEMÁTICA: PRIMEIRO ANO DOS CURSOS CLÁSSICOS E CIENTÍFICOS	Companhia Editora Nacional	São Paulo	Ghemat
1968	BENEDITO CASTRUCCI	GEOMETRIA: CURSO MODERNO	LIVRARIA NOBEL S. A.	São Paulo	Ghemat

Continua...

Continuação...

1968	BENEDITO CASTRUCCI	GEOMETRIA: CURSO MODERNO	LIVRARIA NOBEL S. A.	São Paulo	Ghemat
1968	SCIPIONE DI PIERRO NETTO; LUIZ MAURO ROCHA; RUY MADSEN BARBOSA	MATEMÁTICA: CURSO COLEGIAL MODERNO	IBEP	São Paulo	Ghemat
1968	SCIPIONE DI PIERRO NETTO	PROGRESSÕES ARITMÉTICAS E GEOMÉTRICAS	LIVRARIA NOBEL S. A.	São Paulo	Ghemat
1969	Thales Mello Carvalho	MATEMÁTICA: 2º CICLO	FUNDAÇÃO GETÚLIO VARGAS	Rio de Janeiro	Ghemat
1969	L. H. JACY MONTEIRO	ÁLGEBRA LINEAR	LIVRARIA NOBEL S. A.	São Paulo	Ghemat
1970	RUY MADSEN BARBOSA	ELEMENTOS DE LÓGICA APLICADA AO ENSINO SECUNDÁRIO	LIVRARIA NOBEL S. A.	São Paulo	Ghemat
1970	ANDRÉ CALAME	MATEMÁTICA MODERNA I	EDITORA POLÍGONO S. A.	São Paulo	Ghemat
1970	LEONIDAS HEGENBERG	MATRIZ, VETORES E GEOMETRIA ANALÍTICA	ALMEIDA NEVES EDITORES LTDA	Rio de Janeiro	Ghemat
1970	L. H. JACY MONTEIRO; OSVALDO SANGIORGI; RENATE WATANABE	MATEMÁTICA CURSO MODERNO 2º GRAU	Companhia Editora Nacional	São Paulo	Ghemat
1970	LUIZ MAURO ROCHA; RUY MADSEN BARBOSA	MATEMÁTICA: CURSO COLEGIAL MODERNO	IBEP	São Paulo	Ghemat
1971	ALESIO JOÃO DE CAROLI; CARLOS ALBERTO CALLIOLI; MIGUEL OLIVA FEITOSA	MATRIZES E SISTEMAS LINEARES	AO LIVRO TÉCNICO S. A.	Rio de Janeiro	Ghemat
1971	CÉSAR DACORSO NETTO	ELEMENTOS DE ANÁLISE VETORIAL	Companhia Editora Nacional	São Paulo	Ghemat

Continua...

Continuação...

1971	JOSÉ DE JESUS DA SERRA COSTA	ÁLGEBRA LINEAR E MATRIZES	EDITORA VOZES LTDA	Petrópolis	Ghemat
1971	IRMÃOS MARISTAS	MATEMÁTICA: CURSO GINASIAL	FTD	São Paulo	PESQ
1972	MIGUEL O. FEITOSA	EXERCÍCIOS DE CÁLCULO VETORIAL	LIVRARIA NOBEL S. A.	São Paulo	Ghemat
1972	T. J. FETCHER	ENSINO MODERNO DA MATEMÁTICA: ÁLGEBRA E TEORIA DOS CONJUNTOS	AO LIVRO TÉCNICO S. A.	Rio de Janeiro	Ghemat
1972	T. J. FETCHER	ENSINO MODERNO DA MATEMÁTICA: TÓPICOS DE ARITMÉTICA	AO LIVRO TÉCNICO S. A.	Rio de Janeiro	Ghemat
1972	T. J. FETCHER	ENSINO MODERNO DA MATEMÁTICA: GEOMETRIA E TOPOLOGIA	AO LIVRO TÉCNICO S. A.	Rio de Janeiro	Ghemat
1972	T. J. FETCHER	ENSINO MODERNO DA MATEMÁTICA: ÁLGEBRA LINEAR	AO LIVRO TÉCNICO S. A.	Rio de Janeiro	Ghemat
1972	L. H. JACY MONTEIRO	INICIAÇÃO ÀS ESTRUTURAS ALGÉBRICAS	LPM EDITORA	São Paulo	Ghemat
1972	L. H. JACY MONTEIRO; OSVALDO SANGIORGI; RENATE WATANABE	MATEMÁTICA CURSO MODERNO: SEGUNDO GRAU	Companhia Editora Nacional	São Paulo	PESQ
1972	SYLVIO ANDRAUS; UDMYR P. SANTOS	MATEMÁTICA NO ENSINO DE SEGUNDO GRAU	Companhia Editora Nacional	São Paulo	PESQ
1973	L. H. JACY MONTEIRO; OSVALDO SANGIORGI; RENATE WATANABE	MATEMÁTICA CURSO MODERNO 2º GRAU	Companhia Editora Nacional	São Paulo	Ghemat

Continua...

Continuação...

1974	GELSON IEZZI; OSVALDO DOLCE; JOSÉ CARLOS TEIXEIRA; NILSON MACHADO; MARCIO GOULART; LUIZ CASTRO; ANTONIO MACHADO	2º GRAU MATEMÁTICA 1º SÉRIE	EDITORA ATUAL	São Paulo	PESQ
1975	JOÃO PITOMBEIRA DE CARVALHO	VETORES, GEOMETRIA ANALÍTICA E ÁLGEBRA LINEAR: UM TRATAMENTO MODERNO	AO LIVRO TÉCNICO S. A.	Rio de Janeiro	Ghemat
1976	PAULO BOULOS; RENATE WANTANABE	MATEMÁTICA: 2º GRAU	Companhia Editora Nacional	São Paulo	Ghemat
1976	BENEDITO CASTRUCCI	GEOMETRIA: CURSO MODERNO	LIVRARIA NOBEL S. A.	São Paulo	Ghemat
1977	JOSÉ LUIZ PEREIRA SAMPAIO; NILTON LAPA; SIDNEY LUIZ; CAVALLANTTE	ESTUDOS DE MATEMÁTICA	EDITORA MODERNA	São Paulo	PESQ
1979	FERNANDO TROTTA; LUIZ MÁRCIO PEREIRA IMENES; JOSÉ JAKUBOVIC	SEGUNDO GRAU: MATEMÁTICA APLICADA	EDITORA MODERNA	São Paulo	PESQ
1979	SCIPIONE DI PIERRÔ NETO; MAGDA TERESINHA ANGELO; EDSON DO CARMO; LILIA MARIA FACCIO	MATEMÁTICA 1º GRAU	EDITORA SARAIVA	São Paulo	PESQ
1981	ORLAN DO A. ZAMBUZZI; BOGDAN HRYCYLO; ADILSON T. KOLE	MATEMÁTICA SEGUNDO GRAU	EDITORA ÁTICA	São Paulo	PESQ

Continua...

Continuação...

1984	ANTAR NETO	MATEMÁTICA BÁSICA	EDITORA ATUAL	São Paulo	PESQ
1986	CLEO BASTARRICA	MATRIZES, DETERMINANTES E SISTEMAS LINEARES	D. C. LUZATTO EDITORES LTDA	PORTO ALEGRE	Ghemat
1986	ANTONIO DOS SANTOS MACHADO	MATEMÁTICA TEMAS E METAS: 2 - TRIGONOMETRIA E PROGRESSÕES	ATUAL EDITORA	São Paulo	PESQ
1988	JOSÉ CARLOS TEIXEIRA; VICENZO BONGIOVANNI; ROBERTO BENEDICTO; AGUIAR FILHO; BENEDITO CARDOSO DA SILVA; VERA LÚCIA OLIVEIRA DAS NEVES	AULAS PRÁTICAS DE MATEMÁTICA: SEGUNDO GRAU	EDITORA ÁTICA	São Paulo	PESQ
1993	GELSON IEZZI; OSVALDO DOLCE; JOSÉ CARLOS TEIXEIRA; NILSON MACHADO; MARCIO GOULART; LUIZ CASTRO; ANTONIO MACHADO	MATEMÁTICA: VERSÃO AZUL, INCLUI TRIGONOMETRIA	ATUAL EDITORA	São Paulo	PESQ
1994	JOSÉ RUY GIOVANNI; JOSÉ ROBERTO BONJORNO; JOSÉ RUY GIOVANNI JR	MATEMÁTICA FUNDAMENTAL SEGUNDO GRAU.	FTD	São Paulo	PESQ
1995	ANTONIO NICULAU YOUSSEF; VICENTE PAZ FERNANDES	MATEMÁTICA CONCEITOS E FUNDAMENTOS	EDITORA SCIPIONE	São Paulo	PESQ
1996	ANTONIO DOS SANTOS MACHADO	MATEMÁTICA NA ESCOLA DO SEGUNDO GRAU: COM TRIGONOMETRIA	ATUAL EDITORA	São Paulo	PESQ
1996	NELSON GENTIL; CARLOS ALBERTO MARCONDES DOS SANTOS; ANTONIO CARLOS GRECO; ANTÔNIO BELLOTTO FILHO; SÉRGIO EMÍLIO GRECO	MATEMÁTICA PARA O SEGUNDO GRAU	EDITORA ÁTICA	São Paulo	PESQ
2003	BENIGNO BARRETO FILHO; CLÁUDIO XAVIER DA SILVA	MATEMÁTICA AULA POR AULA	FTD	São Paulo	PESQ
2004	LUIZ ROBERTO DANTE	MATEMÁTICA	ÁTICA	São Paulo	PESQ

Continua...

Continuação...

2005	BENIGNO BARRETO FILHO; CLÁUDIO XAVIER DA SILVA	MATEMÁTICA AULA POR AULA	FTD	São Paulo	PESQ
2005	KÁTICA STOCCO SMOLE; MARIA IGNEZ DINIZ	MATEMÁTICA: ENSINO MÉDIO	SARAIVA	São Paulo	PESQ
2005	LUIZ ROBERTO DANTE	MATEMÁTICA, VOLUME ÚNICO: LIVRO DO PROFESSOR	ÁTICA	São Paulo	PESQ
2007	GELSON IEZZI; OSVALDO DOLCE; DAVID DEGENSZAJN; ROBERTO PÉRIGO	MATEMÁTICA: VOLUME ÚNICO	EDITORA ATUAL	São Paulo	PESQ
2009	GIOVANNI JÚNIOR; JOSÉ RUY	A CONQUISTA DA MATEMÁTICA	FTD	São Paulo	PESQ
2010	GELSON IEZZI; OSWALDO DOLCE; DAVID DEGENSZAJN; ROBERTO PÉRIGO; NILZE DE ALMEIDA	MATEMÁTICA, CIÊNCIAS E APLICAÇÕES: ENSINO MÉDIO	SARAIVA	São Paulo	PESQ
2010	GELSON IEZZI; OSWALDO DOLCE; DAVID DEGENSZAJN; ROBERTO PÉRIGO; NILZE DE ALMEIDA	MATEMÁTICA, CIÊNCIAS E APLICAÇÕES: ENSINO MÉDIO	SARAIVA	São Paulo	PESQ
2010	JOAMIR SOUZA	NOVO OLHAR MATEMÁTICA	FTD	São Paulo	PESQ
2010	JOAMIR SOUZA	NOVO OLHAR MATEMÁTICA	FTD	São Paulo	PESQ
2010	KÁTICA STOCCO SMOLE; MARIA IGNEZ DINIZ	MATEMÁTICA: ENSINO MÉDIO	SARAIVA	São Paulo	PESQ
2010	KÁTICA STOCCO SMOLE; MARIA IGNEZ DINIZ	MATEMÁTICA: ENSINO MÉDIO	SARAIVA	São Paulo	PESQ

Continua...

Continuação...

2010	KÁTICA STOCCO SMOLE; MARIA IGNEZ DINIZ	MATEMÁTICA: ENSINO MÉDIO	SARAIVA	São Paulo	PESQ
2011	EDWALDO BIANCHINI	MATEMÁTICA	MODERNA	São Paulo	PESQ
2012	LUIZ ROBERTO DANTE	PROJETO TELÁRIS: MATEMÁTICA	EDITORA ÁTICA	São Paulo	PESQ
2013	FÁBIO MARTINS DE LEONARDO (ORG)	CONEXÕES COM A MATEMÁTICA	MODERNA	São Paulo	PESQ
2013	FÁBIO MARTINS DE LEONARDO (ORG)	CONEXÕES COM A MATEMÁTICA	MODERNA	São Paulo	PESQ
2013	FÁBIO MARTINS DE LEONARDO (ORG)	CONEXÕES COM A MATEMÁTICA	MODERNA	São Paulo	PESQ
2013	JOAMIR SOUZA	NOVO OLHAR MATEMÁTICA	FTD	São Paulo	PESQ
2013	JOAMIR SOUZA	NOVO OLHAR MATEMÁTICA	FTD	São Paulo	PESQ
2013	KÁTICA STOCCO SMOLE; MARIA IGNEZ DINIZ	MATEMÁTICA: ENSINO MÉDIO	SARAIVA	São Paulo	PESQ
2013	LUIZ ROBERTO DANTE	MATEMÁTICA: CONTEXTO & APLICAÇÕES	ÁTICA	São Paulo	PESQ
2013	LUIZ ROBERTO DANTE	MATEMÁTICA: CONTEXTO & APLICAÇÕES	ÁTICA	São Paulo	PESQ
2013	MANOEL PAIVA	MATEMÁTICA: PAIVA	MODERNA	São Paulo	PESQ
2013	MANOEL PAIVA	MATEMÁTICA: PAIVA	MODERNA	São Paulo	PESQ
2014	MARA REGINA GARCIA GAY (ORG)	PROJETO ARARIBÁ: MATEMÁTICA	MODERNA	São Paulo	PESQ

Continua...

Continuação...

2015	ALCEU DOS SANTOS MAZZIEIRO; PAULO ANTÔNIO FONSECA MACHADO	DESCOBRINDO E APLICANDO A MATEMÁTICA	DIMENSÃO	Belo Horizonte	PESQ
2015	ÁVARO ANDRINI; MARIA JOSÉ VASCONCELLOS	PRATICANDO MATEMÁTICA	EDITORA DO BRASIL S/A	São Paulo	PESQ
2015	EDUARDO CHAVANTE	CONVERGÊNCIAS: MATEMÁTICA	SM	São Paulo	PESQ
2015	EDWALDO BIANCHINI	MATEMÁTICA	MODERNA	São Paulo	PESQ
2015	JOAMIR SOUZA; PATRICIA MORENO PATARO	VONTADE DE SABER MATEMÁTICA	FTD	São Paulo	PESQ
2016	JOAMIR SOUZA; JACQUELINE GARCIA	# CONTATO MATEMÁTICA	FTD	São Paulo	PESQ
2016	JOAMIR SOUZA; JACQUELINE GARCIA	# CONTATO MATEMÁTICA	FTD	São Paulo	PESQ
2017	GELSON IEZZI; OSWALDO DOLCE; DAVID DEGENSZAJN; ROBERTO PÉRIGO; NILZE DE ALMEIDA	MATEMÁTICA, CIÊNCIAS E APLICAÇÕES: ENSINO MÉDIO	SARAIVA	São Paulo	PESQ
2017	GELSON IEZZI; OSWALDO DOLCE; DAVID DEGENSZAJN; ROBERTO PÉRIGO; NILZE DE ALMEIDA	MATEMÁTICA, CIÊNCIAS E APLICAÇÕES: ENSINO MÉDIO	SARAIVA	São Paulo	PESQ
2017	GELSON IEZZI; OSWALDO DOLCE; DAVID DEGENSZAJN; ROBERTO PÉRIGO; NILZE DE ALMEIDA	MATEMÁTICA, CIÊNCIAS E APLICAÇÕES: ENSINO MÉDIO	SARAIVA	São Paulo	PESQ
	ESTELA KAUFMAN FAINGUELERNT; NOELIR DE CARVALHO BORDINHÃO	ALGEBRA LINEAR: GEOMETRIA ANALÍTICA	GOLDEN STAR PUBLICADORA LTDA	São Paulo	Ghemat
	NILO PASTORI	NOÇÕES SOBRE A TEORIA DOS CONJUNTOS	LPM EDITORA	São Paulo	Ghemat

Continua...

Continuação...

	LUIZ MAURO ROCHA	GEOMETRIA NO ESPAÇO	LIVRARIA NOBEL S. A.	São Paulo	Ghemat
	Leo Bomfin	CALCULO VETORIAL	EDITORA CLÁSSICO CIENTÍFICA S. A.	São Paulo	Ghemat
	Euclides Roxo	LIÇÕES DE MATEMÁTICA PROFESSADAS NO CURSO COMPLEMENTAR (CURSOS DE ENGENHARIAS) DO COLÉGIO PEDRO II: NOÇÕES DE ÁLGEBRA VETORIAL	*****	*****	Ghemat
	Euclides Roxo	LIÇÕES DE MATEMÁTICA PROFESSADAS NO CURSO COMPLEMENTAR (CURSOS DE ENGENHARIAS) DO COLÉGIO PEDRO II: NÚMEROS COMPLEXOS	*****	*****	Ghemat
	Sergio Sonnino	LIÇÕES DE CÁLCULO VETORIAL	LIVRARIA NOBEL S. A.	São Paulo	Ghemat
	Sergio Sonnino; Victor Mirshawka	NÚMEROS COMPLEXOS	LIVRARIA NOBEL S. A.	São Paulo	Ghemat
	BENEDITO CASTRUCCI	CÁLCULO VETORIAL	LPM EDITORA	São Paulo	Ghemat
	L. P. M. MAIA	INTRODUÇÃO À ANÁLISE MATEMÁTICA	EDITORA NACIONALISTA	Rio de Janeiro	Ghemat

Fim.

APÊNDICE B – LIVROS COM VARIAÇÃO ENTRE ÂNGULOS

ANO	AUTOR(ES)	TÍTULO	EDITORA	Cidade	ACERVO
1958	SERGIO SONNINO	LIÇÕES DE TRIGONOMETRIA PLANA (COM PROBLEMAS RESOLVIDOS E A RESOLVER)	LIVRARIA NOBEL S. A.	São Paulo	PESQ
1965	CARLOS GALANTE; ANTONIO DE SOUZA TEIXEIRA JR.	TRIGONOMETRIA CURSO COLEGIAL	EDITORA DO BRASIL S/A	São Paulo	Ghemat
1967	LUIZ MAURO ROCHA; RUY MADSEN BARBSA; SCIPIONE DI PIERRO NETO	MATEMÁTICA: CURSO COLEGIAL MODERNO	IBEP	São Paulo	PESQ
1972	SYLVIO ANDRAUS; UDMYR P. SANTOS	MATEMÁTICA NO ENSINO DE SEGUNDO GRAU	Companhia Editora Nacional	São Paulo	PESQ
1974	GELSON IEZZI; OSVALDO DOLCE; JOSÉ CARLOS TEIXEIRA; NILSON MACHADO; MARCIO GOULART; LUIZ CASTRO; ANTONIO MACHADO	2º GRAU MATEMÁTICA 1º SÉRIE	EDITORA ATUAL	São Paulo	PESQ
1977	JOSÉ LUIZ PEREIRA SAMPAIO; NILTON LAPA; SIDNEY LUIZ CAVALLANTE	ESTUDOS DE MATEMÁTICA	EDITORA MODERNA	São Paulo	PESQ
1979	FERNANDO TROTTA; LUIZ MÁRCIO PEREIRA IMENES; JOSÉ JAKUBOVIC	SEGUNDO GRAU: MATEMÁTICA APLICADA	EDITORA MODERNA	São Paulo	PESQ
1979	SCIPIONE DI PIERRÔ NETO; MAGDA TERESINHA ANGELO; EDSON DO CARMO; LILIA MARIA FACCIIO	MATEMÁTICA 1º GRAU	EDITORA SARAIVA	São Paulo	PESQ
1984	ANTAR NETO	MATEMÁTICA BÁSICA	EDITORA ATUAL	São Paulo	PESQ
1986	ANTONIO DOS SANTOS MACHADO	MATEMÁTICA TEMAS E METAS: 2 - TRIGONOMETRIA E PROGRESSÕES	ATUAL EDITORA	São Paulo	PESQ
1988	JOSÉ CARLOS TEIXEIRA; VICENZO BONGIOVANNI; ROBERTO BENEDICTO; AGUIAR FILHO; BENEDITO CARDOSO DA SILVA; VERA LÚCIA OLIVEIRA DAS NEVES	AULAS PRÁTICAS DE MATEMÁTICA: SEGUNDO GRAU	EDITORA ÁTICA	São Paulo	PESQ

Continua...

Continuação...

1993	GELSON IEZZI; OSVALDO DOLCE; JOSÉ CARLOS TEIXEIRA; NILSON MACHADO; MARCIO GOULART; LUIZ CASTRO; ANTONIO MACHADO	MATEMÁTICA: VERSÃO AZUL, INCLUI TRIGONOMETRIA	ATUAL EDITORA	São Paulo	PESQ
1994	JOSÉ RUY GIOVANNI; JOSÉ ROBERTO BONJORNO; JOSÉ RUY GIOVANNI JR	MATEMÁTICA FUNDAMENTAL SEGUNDO GRAU.	FTD	São Paulo	PESQ
1995	ANTONIO NICULAU YOUSSEF; VICENTE PAZ FERNANDES	MATEMÁTICA CONCEITOS E FUNDAMENTOS	EDITORA SCIPIONE	São Paulo	PESQ
1996	ANTONIO DOS SANTOS MACHADO	MATEMÁTICA NA ESCOLA DO SEGUNDO GRAU: COM TRIGONOMETRIA	ATUAL EDITORA	São Paulo	PESQ
1996	NELSON GENTIL; CARLOS ALBERTO MARCONDES DOS SANTOS; ANTONIO CARLOS GRECO; ANTÔNIO BELLOTTO FILHO; SÉRGIO EMÍLIO GRECO	MATEMÁTICA PARA O SEGUNDO GRAU	EDITORA ÁTICA	São Paulo	PESQ
2003	BENIGNO BARRETO FILHO; CLÁUDIO XAVIER DA SILVA	MATEMÁTICA AULA POR AULA	FTD	São Paulo	PESQ
2004	LUIZ ROBERTO DANTE	MATEMÁTICA	ÁTICA	São Paulo	PESQ
2005	BENIGNO BARRETO FILHO; CLÁUDIO XAVIER DA SILVA	MATEMÁTICA AULA POR AULA	FTD	São Paulo	PESQ
2005	KÁTICA STOCCO SMOLE; MARIA IGNEZ DINIZ	MATEMÁTICA: ENSINO MÉDIO	SARAIVA	São Paulo	PESQ
2005	LUIZ ROBERTO DANTE	MATEMÁTICA, VOLUME ÚNICO: LIVRO DO PROFESSOR	ÁTICA	São Paulo	PESQ
2007	GELSON IEZZI; OSVALDO DOLCE; DAVID DEGENSAJN; ROBERTO PÉRIGO	MATEMÁTICA: VOLUME ÚNICO	EDITORA ATUAL	São Paulo	PESQ
2009	GIOVANNI JÚNIOR; JOSÉ RUY	A CONQUISTA DA MATEMÁTICA	FTD	São Paulo	PESQ
2010	KÁTICA STOCCO SMOLE; MARIA IGNEZ DINIZ	MATEMÁTICA: ENSINO MÉDIO	SARAIVA	São Paulo	PESQ
2010	KÁTICA STOCCO SMOLE; MARIA IGNEZ DINIZ	MATEMÁTICA: ENSINO MÉDIO	SARAIVA	São Paulo	PESQ

Continua...

Continuação...

2012	LUIZ ROBERTO DANTE	PROJETO TELÁRIS: MATEMÁTICA	EDITORA ÁTICA	São Paulo	PESQ
2013	FÁBIO MARTINS DE LEONARDO (ORG)	CONEXÕES COM A MATEMÁTICA	MODERNA	São Paulo	PESQ
2013	KÁTICA STOCCO SMOLE; MARIA IGNEZ DINIZ	MATEMÁTICA: ENSINO MÉDIO	SARAIVA	São Paulo	PESQ
2013	LUIZ ROBERTO DANTE	MATEMÁTICA: CONTEXTO & APLICAÇÕES	ÁTICA	São Paulo	PESQ
2013	LUIZ ROBERTO DANTE	MATEMÁTICA: CONTEXTO & APLICAÇÕES	ÁTICA	São Paulo	PESQ
2013	MANOEL PAIVA	MATEMÁTICA: PAIVA	MODERNA	São Paulo	PESQ
2014	MARA REGINA GARCIA GAY (ORG)	PROJETO ARARIBÁ: MATEMÁTICA	MODERNA	São Paulo	PESQ
2015	EDUARDO CHAVANTE	CONVERGÊNCIAS: MATEMÁTICA	SM	São Paulo	PESQ
2015	JOAMIR SOUZA; PATRICIA MORENO PATARO	VONTADE DE SABER MATEMÁTICA	FTD	São Paulo	PESQ
2016	JOAMIR SOUZA; JACQUELINE GARCIA	# CONTATO MATEMÁTICA	FTD	São Paulo	PESQ
2017	GELSON IEZZI; OSWALDO DOLCE; DAVID DEGENSAJN; ROBERTO PÉRIGO; NILZE DE ALMEIDA	MATEMÁTICA, CIÊNCIAS E APLICAÇÕES: ENSINO MÉDIO	SARAIVA	São Paulo	PESQ

Fim.