

**FACULDADE VALE DO CRICARÉ
MESTRADO PROFISSIONAL EM CIÊNCIA,
TECNOLOGIA E EDUCAÇÃO**

ALEKSANDER DE SOUZA MINGUTA

**IMAGENS CONCEITUAIS SOBRE FRAÇÕES EQUIVALENTES
NO ENSINO FUNDAMENTAL: UMA CONTRIBUIÇÃO AO
PROCESSO DE ENSINO E DE APRENDIZAGEM**

SÃO MATEUS-ES

2021

ALEKSANDER DE SOUZA MINGUTA

IMAGENS CONCEITUAIS SOBRE FRAÇÕES EQUIVALENTES
NO ENSINO FUNDAMENTAL: UMA CONTRIBUIÇÃO AO
PROCESSO DE ENSINO E DE APRENDIZAGEM

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Ciência, Tecnologia e Educação da Faculdade Vale do Cricaré, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ciência, Educação e Tecnologia.

Orientador: Professor Dr. Jocitiel Dias da Silva

SÃO MATEUS-ES

2021

Autorizada a reprodução e divulgação total ou parcial deste trabalho, por qualquer meio convencional ou eletrônico, para fins de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte.

Catálogo na publicação

Mestrado Profissional em Ciência, Tecnologia e Educação

Faculdade Vale do Cricaré – São Mateus – ES

M664i

Minguta, Aleksander de Souza.

Imagens conceituais sobre frações equivalentes no ensino fundamental: uma contribuição ao processo de ensino e de aprendizagem / Aleksander de Souza Minguta – São Mateus - ES, 2021.

125 f.: il.

Dissertação (Mestrado Profissional em Ciência, Tecnologia e Educação) – Faculdade Vale do Cricaré, São Mateus - ES, 2021.

Orientação: prof. Dr. Joccitel Dias da Silva.

1. Frações. 2. Imagens na educação. 3. Matemática – Ensino fundamental. I. Silva, Joccitel Dias da. II. Título.

CDD: 372.7

Sidnei Fabio da Glória Lopes, bibliotecário ES-000641/O, CRB 6ª Região – MG e ES

ALEKSANDER DE SOUZA MINGUTA

**IMAGENS CONCEITUAIS SOBRE FRAÇÕES EQUIVALENTES
NO ENSINO FUNDAMENTAL: UMA CONTRIBUIÇÃO AO
PROCESSO DE ENSINO E DE APRENDIZAGEM**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ciência, Tecnologia e Educação da Faculdade Vale do Cricaré (FVC), como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciência, Tecnologia e Educação, na área de concentração Ciência, Tecnologia e Educação.

Aprovado em 17 de dezembro de 2021.

COMISSÃO EXAMINADORA

JOCCITIEL DIAS DA
SILVA:37703250791

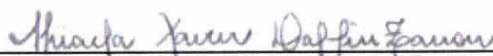
Assinado de forma digital por JOCCITIEL
DIAS DA SILVA:37703250791
Dados: 2021.12.23 14:14:18 -03'00'

Prof. Dr. Jocitiel Dias da Silva
Faculdade Vale do Cricaré (FVC)
Orientador

JOSE GERALDO FERREIRA
DA SILVA:28531973600

Assinado de forma digital por JOSE GERALDO FERREIRA DA SILVA:28531973600
Dados: 2021.12.23 14:14:18 -03'00'

Prof. Dr. José Geraldo Ferreira da Silva
Faculdade Vale do Cricaré (FVC)



Profa. Dra. Thiarla Xavier Dal-Cin Zanon
Universidade Federal do Espírito Santo - UFES

DEDICATÓRIA

À toda minha família, especialmente meus pais, Adiel e Patrícia, por todo esforço e dedicação ao longo de suas vidas para que esse momento fosse possível.

AGRADECIMENTOS

À Deus, Autor da vida e único merecedor de todo louvor, honra e glória.

Aos meus pais, Adiel e Patrícia, sem os quais nada seria feito. Maiores e melhores amigos, apoiadores e suporte em todos os momentos.

Ao meu irmão, Daniel, minhas tias Cátia e Charlene, meus avós Ana e Hervé e meus primos João Pedro, João Lucas e Joyce que, mesmo indiretamente, fazem parte dessa história por fazerem parte da minha vida, e sem os quais de alguma forma faltaria uma parte de mim.

Ao meu orientador, o Prof. Dr. Joccitiel Dias da Silva, pela paciência e confiança, além de todo conhecimento posto à minha disposição.

Aos meus colegas de trabalho de todos os dias, pelo incentivo, apoio e torcida.

Aos professores do Mestrado da Faculdade Vale do Cricaré, pelos conhecimentos compartilhados, ainda que na maior parte do tempo de forma remota através de uma tela fria de computador ou de celular.

Aos meus alunos participantes da pesquisa pelo respeito, confiança e parceria de todos os dias.

À todos os demais envolvidos nessa caminhada que originou esse trabalho, que de uma forma ou de outra contribuíram, conscientemente ou não, para o meu sucesso.

*“Porque estou certo de que, nem a morte,
nem a vida, nem os anjos, nem os
principados, nem as potestades, nem o
presente, nem o porvir, nem a altura, nem a
profundidade, nem alguma outra criatura nos
poderá separar do amor de Deus, que está
em Cristo Jesus nosso Senhor.”*

Carta de Paulo aos Romanos, Capítulo 8, versículos 38 e 39

RESUMO

MINGUTA, ALEKSANDER DE SOUZA. **Imagens conceituais sobre frações equivalentes no ensino fundamental**: uma contribuição ao processo de ensino e de aprendizagem. 2021. 125 f. Dissertação (Mestrado) - Faculdade Vale do Cricaré, São Mateus - ES, 2021.

A presente pesquisa se insere no campo da Educação Matemática e abordou o processo de ensino e de aprendizagem sobre frações equivalentes no ensino fundamental. O tema frações está inserido no contexto dos números racionais e é considerado um dos mais complexos para os estudantes, sendo o conceito de frações equivalentes um dos seus aspectos centrais. A pesquisa teve como objetivo analisar as imagens conceituais evocadas, durante a resolução de atividades sobre equivalência de frações, por estudantes do 7º ano do ensino fundamental de uma escola municipal de Presidente Kennedy/ES. Para isso, baseou-se nos estudos de Tall e Vinner (1981) e de Zanon (2019) sobre imagens conceituais e definição do conceito, e nos textos de Bertoni (2009) e Giovanni Júnior e Castrucci (2018a) sobre frações equivalentes. A pesquisa foi realizada em uma escola municipal de Presidente Kennedy, sul do Espírito Santo, e dela participaram 36 estudantes do 7º ano do ensino fundamental. Investigou-se as imagens conceituais iniciais apresentadas pelos estudantes sobre frações equivalentes e sua reconfiguração mediante a aplicação de atividades em aulas sobre esse tópico matemático. Quanto aos resultados, verificou-se a presença de imagens conceituais iniciais não vazias, algumas relacionadas ao ensino e a aprendizagem vivenciadas em anos anteriores e outras relacionadas com a definição de frações equivalentes. Tais imagens, em geral, se mostraram fragmentadas e incipientes, embora em sua maioria coerentes quando comparadas com a teoria formal. Concluiu-se que as aulas aplicadas, baseadas em discussões coletivas envolvendo a turma inteira em torno de atividades específicas, previamente selecionadas por suas características que tendem a favorecer a construção/reconstrução e o desvelar de imagens conceituais, forneceram base para movimentações das imagens, pautadas em inclusões e exclusões positivas e negativas de características ligadas ao conceito de equivalência de frações, relevantes para sua caracterização, compreensão e utilização. O desenvolvimento da pesquisa subsidiou a elaboração de um guia didático destinado a professores de matemática, com orientações e sugestões de atividades sobre frações equivalentes tendo em vista a utilização da análise de imagens conceituais na prática docente.

Palavras-chave: Frações equivalentes. Imagens conceituais. Educação matemática. 7º ano. Ensino fundamental.

ABSTRACT

MINGUTA, ALEKSANDER DE SOUZA. **Conceptual images about equivalent fractions in elementary school**: a contribution to teaching and learning. 2021. 125 f. Dissertation (Master's Degree) - Faculdade Vale do Cricaré, São Mateus - ES, 2021.

This research is part of the field of Mathematics Education and addressed the teaching and learning process about equivalent fractions in elementary school. The theme fractions is inserted in the context of rational numbers and is considered one of the most complex for students, with the concept of equivalent fractions being one of its central aspects. The research aimed to analyze the conceptual images evoked, during the resolution of activities on equivalence of fractions, by students of the 7th year of elementary school at a municipal school in Presidente Kennedy/ES. For this, it was based on studies by Tall and Vinner (1981) and Zanon (2019) on conceptual images and concept definition, and on texts by Bertoni (2009) and Giovanni Júnior and Castrucci (2018a) on equivalent fractions. The research was carried out in a municipal school in Presidente Kennedy, south of Espírito Santo, and 36 students from the 7th year of elementary school participated in it. The initial conceptual images presented by students about equivalent fractions were investigated and their reconfiguration through the application of activities in classes on this mathematical topic. As for the results, the presence of non-empty initial conceptual images was verified, some related to teaching and learning experienced in previous years and others related to the definition of equivalent fractions. Such images, in general, proved to be fragmented and incipient, although mostly coherent when compared to the formal theory. It was concluded that the applied classes, based on collective discussions involving the whole class around specific activities, previously selected for their characteristics that tend to favor the construction/reconstruction and the unveiling of conceptual images, provided a basis for movements of the images, based on in positive and negative inclusions and exclusions of characteristics linked to the concept of equivalence of fractions, relevant to its characterization, understanding and use. The development of the research supported the elaboration of a didactic guide for mathematics teachers, with guidelines and suggestions for activities on equivalent fractions with a view to the use of conceptual image analysis in teaching practice.

Keywords: Equivalent fractions. Conceptual images. Mathematics education. 7th year. Elementary School.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Exemplo de adição de números racionais	35
Figura 2 – Resposta de Adamastor na atividade 2 do primeiro teste	66
Figura 3 – Resposta de Adamastor na atividade 4 do primeiro teste	67
Figura 4 – Resposta de Carlos na atividade 1 do primeiro teste	68
Figura 5 – Resposta de Paola na atividade 1 do primeiro teste	69
Figura 6 – Resposta de Paola na atividade 2 do primeiro teste	69
Figura 7 – Obtendo frações equivalentes	70
Figura 8 – Resposta de Paola na atividade 4 do primeiro teste	70
Figura 9 – Resposta de Nyck na atividade 2 do primeiro teste	71
Figura 10 – Resposta de Nyck na atividade 3 do primeiro teste	71
Figura 11 – Resposta de Nyck na atividade 4 do primeiro teste	72
Figura 12 – Resposta de Victor na atividade 2 do primeiro teste	72
Figura 13 – Atividade 1 da Aula 1	73
Figura 14 – Resposta de Victor na atividade 4 do primeiro teste	74
Figura 15 – Resposta de Helena na atividade 2 do primeiro teste	75
Figura 16 – Resposta de Zoe na atividade 3 do primeiro teste	76
Figura 17 – Resposta de Zoe na atividade 4 do primeiro teste	76
Figura 18 – Resposta de Florisvaldo na atividade 2 do primeiro teste	76
Figura 19 – Respostas de Clara nas atividades 3 e 4 do primeiro teste	77
Figura 20 – Respostas de Rilari nas atividades 1 e 2 do primeiro teste	78
Figura 21 – Resposta de Victor na atividade 3 do primeiro teste	79
Figura 22 – Resposta de Adamastor na atividade 5 do primeiro teste	79
Figura 23 – Resposta de Florisvaldo na atividade 5 do primeiro teste	80
Figura 24 – Resposta de Nyck na atividade 6 do primeiro teste	81
Figura 25 – Respostas de Adamastor e Paola na atividade 6 do primeiro teste	81
Figura 26 – Resposta de Paola na atividade 1 do segundo teste	86
Figura 27 – Resposta de Zoe na atividade 1 do segundo teste	86
Figura 28 – Resposta de Clara na atividade 1 do segundo teste	86
Figura 29 – Resposta de Jade na atividade 2 do segundo teste	91
Figura 30 – Resposta de Zoe na atividade 2 do segundo teste	92
Figura 31 – Resposta de Helena na atividade 2 do segundo teste	92
Figura 32 – Resposta de Paola na atividade 3 do segundo teste	93

Figura 33 – Resposta de Nyck na atividade 4 do segundo teste	94
Figura 34 – Resposta de Helena na atividade 4 do segundo teste	95

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Descritores relacionados aos Números Racionais na Prova Brasil aplicada no 5º ano	30
Tabela 2 – Descritores relacionados aos Números Racionais na Prova Brasil aplicada no 9º ano	30
Tabela 3 – Números Racionais no 6º ano segundo a BNCC	31
Tabela 4 – Números Racionais no 7º ano segundo a BNCC	32
Tabela 5 – Atividades do primeiro teste	52
Tabela 6 – Organização da Aula 1	55
Tabela 7 – Atividades da Aula 1	56
Tabela 8 – Organização da Aula 2	57
Tabela 9 – Atividades da Aula 2	58
Tabela 10 – Organização da Aula 3	59
Tabela 11 – Atividades da Aula 3	60
Tabela 12 – Atividades do segundo teste	62
Tabela 13 – Respostas na atividade 1 do segundo teste	86

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ANRESC	Avaliação Nacional do Rendimento Escolar
APNP	Atividades Pedagógicas não Presenciais
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CEUNES	Centro Universitário Norte do Espírito Santo
EBRAPEM	Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-graduação em Educação Matemática
EDUCIMAT	Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática
EJA	Educação de Jovens e Adultos
EM	Educação Matemática
ENEM	Encontro Nacional de Educação Matemática
ES	Espírito Santo
IFES	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo
MG	Minas Gerais
MMC	Mínimo Múltiplo Comum
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PPGE	Programa de Pós-Graduação em Educação
PPGEEB	Programa de Pós-Graduação em Ensino na Educação Básica
PROFMAT	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
PROMESTRE	Mestrado Profissional em Educação e Docência
PUC	Pontifícia Universidade Católica
SBEM	Sociedade Brasileira de Educação Matemática
SIPEM	Seminário Internacional de Educação Matemática
SP	São Paulo
TCC	Trabalho de Conclusão de Curso
TDIC	Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação
UFES	Universidade Federal do Espírito Santo
UFMG	Universidade Federal de Minas Gerais

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	14
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	20
2.1 EDUCAÇÃO MATEMÁTICA	20
2.1.1 O ensino e a aprendizagem na pandemia	25
2.2 OS NÚMEROS RACIONAIS E A REPRESENTAÇÃO FRACIONÁRIA	28
2.2.1 Importância e desafios do ensino e aprendizagem de frações	32
2.2.2 As frações e seus significados	36
2.3 IMAGEM CONCEITUAL E DEFINIÇÃO DO CONCEITO	38
2.4 REVISÃO DE LITERATURA	43
3 PERCURSO METODOLÓGICO	49
3.1 ETAPAS DA PESQUISA	50
3.1.1 Primeira etapa: diagnóstico e obtenção de imagens iniciais	51
3.1.2 Segunda etapa: aulas sobre frações equivalentes	54
3.1.2.1 Aula 1: Definição, obtenção e verificação de frações equivalentes	57
3.1.2.2 Aula 2: Comparação e ordenação de frações	57
3.1.2.3 Aula 3: Adição e subtração de frações	59
3.1.3 Terceira etapa: verificação da movimentação de imagens conceituais	61
4 DISCUSSÕES E RESULTADOS	64
4.1 IMAGENS CONCEITUAIS INICIAIS	64
4.1.1 Análise das imagens conceituais iniciais obtidas	65
4.1.1.1 Imagem conceitual da definição do conceito	65
4.1.1.2 Imagem conceitual do ensino e aprendizagem	69
4.2 MOVIMENTAÇÃO DE IMAGENS CONCEITUAIS	83
4.2.1 Categoria de análise	84
4.2.2 Análise das imagens finais e reconstruções	85
CONSIDERAÇÕES FINAIS	99
REFERÊNCIAS	102
APÊNDICE A – PRODUTO FINAL	106
ANEXO A – TERMO DE AUTORIZAÇÃO DA INSTITUIÇÃO COPARTICIPANTE	118
ANEXO B – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (TCLE) – RESPONSÁVEL LEGAL	119

ANEXO C – TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO	122
ANEXO D – PÁGINA DA PLATAFORMA BRASIL COM DADOS DA VERSÃO DO PROJETO DE PESQUISA APROVADO	125

1 INTRODUÇÃO

Dentre os diversos tópicos matemáticos abordados na educação básica, as frações representam um desafio ao ensino e a aprendizagem, tanto para estudantes quanto para professores (NUNES; BRYANT, 2009). No Brasil, o tema é apontado como aquele em que os estudantes do ensino fundamental mais enfrentam problemas na aprendizagem (BRASIL, 1997; 1998; 2017; BERTONI, 2009; MENOTTI, 2014). No entanto, seu estudo reveste-se de importância pois antecede o de outros conteúdos para os quais fornecem a base de conhecimento (SANTOS, 1997).

Sobre isso, Bertoni (2009) destaca o baixo rendimento dos estudantes em avaliações sobre o tema, de modo que, nos últimos anos, pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem têm detectado vários problemas e levantado diversas hipóteses. No entanto, observam-se propostas que não dão conta da totalidade da problemática e são inconclusivas.

Os problemas envolvendo o ensino e a aprendizagem de frações estão relacionados à uma série de fatores como, por exemplo, a formação de professores e a forma como o conteúdo é introduzido, principalmente nos anos iniciais do ensino fundamental; o ensino baseado na memorização de regras e algoritmos; a ênfase no ensino baseado no particionamento de figuras em detrimento de outros significados e de conceitos relacionados às frações, como a equivalência; além dos desafios impostos pelas características próprias dos números fracionários¹ como a notação, operações e variedade de significados (BRASIL, 1997, 1998; SILVA, 2011; CHEQUETTO, 2016; BERTONI, 2009; NUNES; BRYANT, 2009; CANOVA, 2013; MENOTTI, 2014).

Behr, Lesh, Post e Silver (1983) também discorrem sobre as dificuldades de compreensão enfrentadas por alunos do ensino fundamental diante dos números fracionários, colocando-o como um dos mais complexos assuntos encontrados pelas crianças. No entanto, destacam alguns pontos sobre a importância desse assunto:

(a) de uma perspectiva prática, a capacidade de lidar eficazmente com esses conceitos melhoram amplamente a capacidade de entender e lidar com situações e problemas no mundo real; (b) de uma perspectiva psicológica, números racionais fornecem uma arena rica dentro da qual as crianças podem se desenvolver e expandir as estruturas mentais necessárias para continuação do desenvolvimento intelectual; e (c) de uma perspectiva

¹ As expressões *fração* e *número fracionário* serão usadas com o mesmo significado, o de números racionais escritos na forma fracionária.

matemática, o entendimento sobre número racional fornece a base sobre a qual as operações algébricas elementares se basearão posteriormente. (BEHR et al, 1983, p. 1, tradução nossa²).

A importância do ensino e da aprendizagem dos conteúdos matemáticos, aos quais se pode incluir as frações, tendo em vista a sua utilidade prática, recebe destaque na Base Nacional Comum Curricular [BNCC] (BRASIL, 2017), que faz menção da utilização de conceitos matemáticos como ferramentas “[...] para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados [...]” (BRASIL, 2017, p. 267), estando essa perspectiva necessariamente atrelada ao “[...] pressuposto de que a aprendizagem em Matemática está intrinsecamente relacionada à compreensão, ou seja, à apreensão de significados dos objetos matemáticos [...]” (p. 276).

Em vista disso, é possível destacar a presença dos números fracionários no cotidiano auxiliando em uma melhor compreensão sobre porcentagens, razões, escalas, possibilidades, receitas culinárias, bem como em áreas como música, biologia, química, engenharia, representando quantidades tanto por meio da escrita quanto oralmente (BERTONI, 2009; SILVA, 2011). Por tudo isso, concorda-se com Bertoni (2009, p. 16), ao argumentar que “[...] é preciso encontrar caminhos para levar o aluno a identificar quantidades fracionárias em seu contexto cotidiano e a apropriar-se da ideia do número fracionário correspondente, usando-os de modo significativo [...]”, de modo que esses números funcionem na vida, e não apenas em figuras divididas.

Por outro lado, no contexto do ensino e da aprendizagem, a falta de clareza sobre frações e conceitos importantes como o da equivalência de frações, pode gerar dificuldades para os estudantes na compreensão de outros conceitos matemáticos ao longo dos anos da escolaridade, tanto dentro do próprio contexto dos números fracionários (ordenação, comparação e operações) como em outros tópicos, como proporções, equações e cálculo algébrico (BRASIL, 1998; 2017; TOLEDO; TOLEDO, 2009; MANDARINO, 2010; MARTINHO, 2020).

² (a) from a practical perspective, the ability to deal effectively with these concepts vastly improves one's ability to understand and handle situations and problems in the real world; (b) from a psychological perspective, rational numbers provide a rich arena within which children can develop and expand the mental structures necessary for continued intellectual development; and (c) from a mathematical perspective, rational-number understandings provide the foundation upon which elementary algebraic operations can later be based.

É nesse contexto que se insere o presente estudo, no qual investigou-se a respeito de como estudantes do 7º ano do ensino fundamental de uma escola municipal de Presidente Kennedy, localizado no estado do Espírito Santo (ES), se expressam sobre o conceito de equivalência de frações ao resolverem atividades sobre esse assunto. Mais especificamente, almejou-se analisar a produção desses estudantes quanto às imagens conceituais evocadas por eles ao resolverem atividades sobre frações equivalentes. Assim, a partir da pesquisa, são apresentadas algumas contribuições à prática docente e à pesquisa no contexto do ensino e da aprendizagem de números fracionários.

Nesse intuito, fundamentou-se nos estudos de Tall e Vinner (1981) e Zanon (2019). Existe uma possibilidade de ampliar e ressignificar os trabalhos desenvolvidos por esses autores, pois nos permitiriam utilizar a fundamentação teórica para abordar o conceito de equivalência de frações nos anos finais do ensino fundamental, em um processo de reflexão e pesquisa sobre a prática docente.

Tall e Vinner (1981), no artigo intitulado *Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity*, introduzem e utilizam as ideias de Imagem Conceitual e Definição do Conceito, apresentando um estudo no qual discorrem sobre imagens conceituais sobre limites e continuidade de funções e sequências. Por outro lado, Zanon (2019), em sua tese intitulada *Imagens conceituais de combinatória no ensino superior de matemática*, investiga imagens conceituais evocadas por estudantes de um curso de Licenciatura em Matemática relacionadas à análise combinatória.

Diante disso, destaca-se o importante movimento de inserção da pesquisa científica no contexto da prática docente na educação básica, produzindo impactos positivos relevantes por motivar a produção de novos conhecimentos para modificação da prática docente num processo de intervenção da realidade em busca de melhorias para ela.

A origem da presente pesquisa identifica-se com o apontado por Zanon (2019) ao dizer que, em geral, as motivações que dão origem à pesquisa no contexto das práticas educativas são resultantes “[...] de uma curiosidade despertada no pesquisador diante de algum problema por ele vivenciado em sua prática educacional [...]” (p. 108), contribuindo tanto para o avanço científico na área, quanto para enriquecer o trabalho docente, inclusive o seu.

A observação da prática docente proporcionou a identificação de dificuldades por parte dos alunos em relação a compreensão sobre os números fracionários, como também na realidade mais ampla, tanto no Brasil como em outros países, com pesquisas apontando para as mesmas dificuldades encontradas na prática dentre outras (BEHR et al, 1983; SANTOS, 1994, 1995, 1997; SANTOS; REZENDE, 1996; MERLINI, 2005; NUNES; BRYANT, 2008, 2009; BERTONI, 2009; TOLEDO; TOLEDO, 2009; SILVA, 2011; CHEQUETTO, 2016; MARTINHO, 2020).

No entanto, o interesse por pesquisar sobre o ensino e a aprendizagem de números fracionários surgiu durante a graduação em Licenciatura em Matemática, no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo (Ifes), *campus* Cachoeiro de Itapemirim/ES, na realização do estágio não obrigatório entre os anos de 2017 e 2018 em uma escola municipal de Itapemirim/ES. Naquela ocasião, foram desenvolvidas atividades de reforço escolar em matemática destinadas a estudantes de turmas do 4º ao 9º ano do ensino fundamental.

Nesse período, foi possível observar especialmente nos alunos dos anos iniciais do ensino fundamental, dificuldades relacionadas principalmente com as operações com números naturais e no entendimento sobre frações. Já nos anos finais, as principais dificuldades eram relacionadas às operações com números inteiros e com números fracionários, ao operarem com eles como se fossem números naturais. Além disso, a interpretação e resolução de problemas era uma dificuldade apresentada pelos alunos (MINGUTA; ZANON, 2018)³.

Percebeu-se que os alunos apresentavam mais dificuldades em relação aos números fracionários, desde os anos iniciais, quando é feita a introdução ao assunto (MINGUTA; ZANON, 2018). Nos anos finais o tema é retomado e aparece associado a outros tópicos matemáticos. Observou-se também que a adição e a subtração envolvendo frações eram fonte de muitos erros, associados à incompreensão sobre os significados das frações e sobre a relação de equivalência, este último desempenhando um papel central no contexto dos números racionais (NUNES; BRYANT; PRETZLIK; BELL; EVANS; WADE, 2008).

Surgiu então o interesse, naquela ocasião, de desenvolver um estudo que buscou “[...] compreender as ações de um futuro professor de matemática na condução de discussões coletivas sobre frações equivalentes no 5º ano do ensino

³ Trabalho não publicado.

fundamental [...]” (MINGUTA; ZANON, 2018, p. 2), pesquisa realizada como Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) da Licenciatura em Matemática.

Uma turma do 5º ano foi escolhida pois é nesse período escolar que a equivalência de frações é formalmente abordada pela primeira vez (BRASIL, 1997; 2017) sendo, posteriormente, retomado no 6º e no 7º ano do ensino fundamental. Foi devido à relevância desse assunto para o ensino e para a aprendizagem de matemática na sequência da escolaridade que se preocupou com o entendimento apropriado do aluno nessa fase de transição dos anos iniciais para os anos finais do ensino fundamental (MINGUTA; ZANON, 2018).

Tendo concluído a graduação em dezembro de 2018, a partir de fevereiro de 2019 teve início a jornada na docência, em uma escola municipal de Presidente Kennedy/ES, onde se encontrou um cenário semelhante ao descrito anteriormente. Atuando em turmas de 6º ano do ensino fundamental, foi possível perceber dificuldades enfrentadas pela maioria dos estudantes em relação aos números fracionários, como, por exemplo, nas operações com frações.

Especialmente em relação à adição e subtração de frações com denominadores diferentes, a não compreensão da equivalência de frações fazia com que as operações fossem feitas de maneira equivocada ou por meio de técnicas e algoritmos memorizados por uma pequena parcela dos estudantes. Nunes e Bryant (2009) argumentam que é impossível aprender a somar e subtrair frações cujos denominadores são diferentes sem perceber que elas precisam ser transformadas em frações equivalentes com denominadores iguais.

Esses movimentos me levaram a ingressar, em fevereiro de 2020, no Programa de Mestrado Profissional em Ciência, Tecnologia e Educação da Faculdade Vale do Cricaré, em São Mateus/ES, local em que via oportunidade de prosseguir nos estudos referentes ao ensino e a aprendizagem dos números fracionários no ensino fundamental.

Assim, em face às considerações e reflexões apresentadas, a presente pesquisa foi desenvolvida procurando responder à seguinte questão: - **Quais imagens conceituais são evocadas, durante a resolução de atividades sobre equivalência de frações, por estudantes do 7º ano do ensino fundamental de uma escola municipal de Presidente Kennedy/ES?**

Para responder a essa questão, como objetivo geral da pesquisa, buscou-se **analisar as imagens conceituais evocadas, durante a resolução de atividades**

sobre equivalência de frações, por estudantes do 7º ano do ensino fundamental de uma escola municipal de Presidente Kennedy/ES.

Desse objetivo, foram tomados alguns objetivos específicos como desdobramentos que nortearam as ações empreendidas no desenvolvimento da pesquisa, sendo eles:

- Identificar as imagens conceituais iniciais sobre frações equivalentes apresentadas pelos estudantes na resolução de atividades sobre o conteúdo;
- Verificar como essas imagens conceituais iniciais apresentadas pelos estudantes se modificam ou não durante a realização das atividades sobre frações equivalentes;
- Produzir um guia didático com orientações e sugestões de atividades para o ensino e para a aprendizagem de frações equivalentes a partir do trabalho com imagens conceituais.

A seguir, no Capítulo 2, apresenta-se uma revisão bibliográfica trazendo contribuições de diversos autores que versam sobre Educação Matemática, contexto no qual a pesquisa se insere. Dialoga-se sobre imagens conceituais, sobre números fracionários e o ensino e a aprendizagem desse tópico matemático, apresentando, inclusive, trabalhos de pesquisadores que se interessaram por desenvolver estudos correlacionados a este.

No Capítulo 3 apresenta-se todo o percurso metodológico pensado e seguido na realização da pesquisa. São descritas suas características e as etapas que compuseram todo o trabalho desenvolvido.

No Capítulo 4 faz-se a análise e a discussão dos dados, à luz das pesquisas de Tall e Vinner (1981) e de Zanon (2019), dentre outras, sobre imagens conceituais e definição do conceito, e nos textos de Bertoni (2009) e Giovanni Júnior e Castrucci (2018a) em relação às frações equivalentes, bem como a apresentação dos resultados obtidos.

Por fim, nas considerações finais, os resultados obtidos foram sintetizados, os quais se mostraram como possíveis repostas à indagação inicial de pesquisa. Além disso, foram elencadas algumas sugestões para futuras pesquisas relacionadas ao tema da presente pesquisa, cujos objetivos não foram abrangidos em seu escopo. Como apêndice, apresenta-se um guia didático proposto como produto final da pesquisa (conforme apontado no terceiro e último objetivo específico).

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Este capítulo apresenta a literatura que deu suporte e direcionamento ao desenvolvimento da presente pesquisa. Ampara-se em escritos de diversos autores, nas suas respectivas especialidades, bem como na produção acadêmica relacionada ao tema do presente trabalho e em documentos oficiais.

Aborda-se a Educação Matemática (EM), por estar esse trabalho inserido em seu contexto tanto do ponto de vista de área científica de pesquisa e produção de conhecimento como do ponto de vista de área de atuação profissional e prática. Nesse sentido, são apresentadas considerações sobre a EM de modo geral e nos contextos específicos do ensino e da aprendizagem sobre frações e da educação em tempos da pandemia causada pela COVID-19.

Também é feita uma abordagem sobre os números racionais em sua escrita fracionária. Enfatiza-se o ensino e a aprendizagem do conceito de equivalência de frações, foco da pesquisa escolhido dentre os conteúdos matemáticos abordados no ensino fundamental.

É também apresentada a literatura relacionada às ideias de Imagens Conceituais e Definição do Conceito, base teórica que fundamentou a análise da produção dos estudantes em relação a equivalência de frações, encaminhando assim a avaliação das possibilidades e limitações da proposta a ser desenvolvida na presente pesquisa e, conseqüentemente, do produto final – um guia didático com orientações e sugestões quanto a atividades para o ensino e aprendizagem de frações equivalentes.

Por fim, na última seção, apresenta-se uma revisão de literatura na qual são trazidas algumas pesquisas acadêmicas que se relacionam com o tema do presente trabalho, expondo um pouco do panorama da pesquisa na área e agregando contribuições à presente pesquisa em diversos aspectos, como referenciais metodológicos e bibliográficos.

2.1 EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Uma vez estando esta pesquisa inserida no contexto da EM, convém destacar alguns aspectos relacionados a esse tema. Em termos de uma possível conceituação, tem-se que

a Educação Matemática é uma área de conhecimento das ciências sociais ou humanas, que estuda o ensino e a aprendizagem da matemática. De modo geral, [...] caracteriza-se como uma práxis que envolve o domínio do conteúdo específico (a matemática) e o domínio de ideias e processos pedagógicos relativos à transmissão/assimilação e/ou à apropriação/construção do saber matemático escolar. Entretanto, sendo a prática educativa determinada pela prática social mais ampla, ela atende a determinadas finalidades humanas e aspirações sociais concretas. (FIORENTINI; LORENZATO, 2007, p. 5).

Fiorentini e Lorenzato (2007, p. 4) também afirmam que a pesquisa em EM se desenvolve por meio de métodos de interpretação e análise utilizados nas ciências sociais e humanas, “[...] tendo como perspectiva o desenvolvimento de conhecimentos e práticas pedagógicas que contribuam para uma formação mais integral, humana e crítica [...]”, tanto do aluno como também do professor.

Enquanto área de conhecimento e de pesquisa científica de natureza interdisciplinar, a EM tem seu surgimento marcado no início do século passado, como uma subárea da matemática e da educação (MIGUEL; GARNICA; IGLIORI; D’AMBROSIO, 2004), passando a partir de então, a vivenciar uma explosão de estudos na área voltados à diversos aspectos que vão desde propostas de renovação curricular à psicologia da aprendizagem.

No Brasil, o nascimento da EM pode ser marcado no início da década de 1970, tanto como campo profissional quanto como área de pesquisa científica, contando hoje com diversos grupos de estudo espalhados pelo país, em diversas linhas de investigação consolidadas (FIORENTINI; LORENZATO, 2007). Em vista disso, a Sociedade Brasileira de Educação Matemática [SBEM] organiza eventos para discussão e divulgação da produção científica na área, que são o Encontro Nacional de Educação Matemática [ENEM], desde 1987; o Seminário Internacional de Educação Matemática [SIPEM], desde 2000; e o Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em EM [EBRAPEM], desde 1997, dentre outros.

D’Ambrosio (2009) argumenta que é por meio da pesquisa que a teoria e a prática se encontram, sendo a pesquisa o elo entre ambas. Além disso, explica que

[...] um princípio básico das teorias de conhecimento nos diz que as teorias são resultado das práticas. Portanto, a prática resultante da pesquisa modificará ou aprimorará a teoria de partida. E assim modificada ou aprimorada essa teoria criará necessidade e dará condições de mais pesquisa, com maiores detalhes e profundidade, o que influenciará a teoria e a prática. Nenhuma teoria é final, assim como nenhuma prática é definitiva, e não há teoria e prática desvinculadas (D’AMBROSIO, 2009, p. 81).

Mendes (2009, p. 23) apresenta algumas das principais finalidades da EM enquanto área de estudos e pesquisas, a saber: “[...] desenvolver, testar e divulgar métodos inovadores de ensino; elaborar e implementar mudanças curriculares, além de desenvolver e testar materiais de apoio para o ensino de Matemática [...]”. Além dessas, ressalta o papel desempenhado pela EM na formação de professores de Matemática em cursos de licenciatura, cursos de curta duração e em cursos de pós graduação *latu e stritu sensu*, almejando que o ensino de matemática seja “[...] o mais eficaz e proveitoso possível [...]”.

É nesse movimento de busca por alternativas que possam produzir melhorias no processo de ensino e aprendizagem de matemática que surgem algumas tendências na EM para o século XXI, levando em conta diferentes abordagens. Uma vez não sendo o objetivo desse trabalho explorar e se aprofundar nessas tendências, convém destacar, no entanto, em linhas gerais, o papel importante das abordagens que levam em consideração o contexto no qual o aluno está inserido, valorizando sua história, origem e experiências. São visões e propostas metodológicas que apontam para um papel da matemática indo muito além de uma série de conceitos e conteúdos estáticos e desvinculados da realidade, em busca de uma aprendizagem com significado, como o fazem a etnomatemática, os projetos de investigação, modelagem matemática e resolução de problemas (MENDES, 2009).

Quanto a isso, Mendes (2009) fala sobre a preocupação da EM atual com o que pode vir da matemática para contribuir com a formação integral do cidadão, assumindo que “[...] o pensamento matemático é uma construção humana que se desenvolve dentro de um contexto histórico-social e tem reflexos e aplicações neste contexto [...]” (p. 24), o que Fiorentini e Lorenzato (2007) classificam como contexto sociocultural e político do ensino-aprendizagem da matemática.

Do ponto de vista da EM enquanto área de atuação na prática, considera-se a visão de D’Ambrosio (2009) pertinente, articulando suas concepções de matemática e educação como estratégias contextualizadas e interdependentes. Para ele, a matemática é compreendida como uma estratégia desenvolvida pela humanidade ao longo dos anos com o objetivo de explicar, entender, manejar e “[...] conviver com a realidade sensível, perceptível e com o seu imaginário [...]” (p. 7), inserida em um contexto natural e cultural que possui variações de acordo com a geografia e a história dos indivíduos e dos grupos aos quais pertencem. Por outro lado, quanto a educação,

o autor enxerga como uma estratégia de estímulo que visa o desenvolvimento tanto individual quanto coletivo, para sua manutenção, sobrevivência e transcendência.

Nascimento (2020) também destaca a importância de uma EM voltada à cidadania, observando os aspectos sócio-históricos e culturais presentes na realidade dos alunos, de modo que “[...] seja exequível aos estudantes adquirir habilidades e competências que possibilitem a melhoria da qualidade de vida individual ou coletiva [...]” (p. 24).

Tais considerações estão de acordo com a BNCC (BRASIL, 2017) e nos remetem ao que ela preconiza no que se refere aos objetivos mais gerais da educação básica. Visa a formação e o desenvolvimento humano considerando a complexidade envolvida nesse processo e assumindo uma visão ao mesmo tempo plural, singular e integral do indivíduo. Almeja-se que a educação esteja “[...] voltada ao seu acolhimento, reconhecimento e desenvolvimento pleno, nas suas singularidades e diversidades [...]” (BRASIL, 2017, p. 14).

Em vista da necessidade de se levar em conta um trabalho pedagógico que articule os aspectos socioculturais dos alunos, deve-se buscar a formação de conceitos considerando na matemática escolar aquela possivelmente vivenciada por eles também fora da escola. Isso pode acontecer através de um intercâmbio entre as formas de pensamento, destacando o conhecimento matemático não como uma lista de conteúdos a serem memorizados, um saber pronto e engessado, mas um elemento da cultura geral do cidadão que pode ser percebido em diversas situações, como “na linguagem corrente, na imprensa, nas leis, na propaganda, nos jogos, nas brincadeiras” dentre outras situações do dia a dia (MIGUEL, 2005, p. 378).

Logo, em conformidade com o que orienta a BNCC (BRASIL, 2017), trata-se da urgência em se fazer uma EM pautada na “[...] importância do contexto para dar sentido ao que se aprende [...]” e “[...] no estímulo à sua aplicação na vida real [...]” (BRASIL, 2017, p. 15). Quanto a isso, Miguel (2003) argumenta ainda que

[...] um processo significativo de ensino de Matemática deve conduzir os alunos à exploração de uma grande variedade de ideias e de estabelecimento de relações entre fatos e conceitos de modo a incorporar os contextos do mundo real, as experiências e o modo natural de envolvimento para o desenvolvimento das noções matemáticas com vistas à aquisição de diferentes formas de percepção da realidade (MIGUEL, 2005, p. 377).

Trazendo essa discussão para o campo do ensino e da aprendizagem de frações, Bertoni (2009) apresenta considerações semelhantes às anteriores quando,

ao pesquisar e avaliar o modo como ainda é feita a abordagem sobre frações no ensino fundamental, seja por professores ou pela maioria dos livros didáticos, verificou não haver uma educação que vise a formação do cidadão crítico, autônomo e inserido na sociedade ativamente, de modo que

autonomia e criticismo não serão atingidos por esquemas de dependência ao professor, desvinculados de um pensar consciente. Por sua vez, a atuação ativa num mercado de trabalho que requer capacidade de resolver problemas, avaliar situações, propor soluções e ter versatilidade para novas funções, não pode ser alcançada apenas pelo exercício de um fazer mecânico, sem pensamento próprio e sem questionamento (BERTONI, 2009, p. 29).

O exposto acima se trata de um modelo de ensino que, na maioria das vezes, enfatiza a formação, nas palavras de Bertoni (2009), do “aluno-calculadora”, em que mais importa que ele consiga resolver operações quaisquer, lançando mão de técnicas e algoritmos memorizados, em detrimento da compreensão de conceitos úteis e significativos para aplicação em situações práticas e contextualizadas.

Contra esse modelo, cabe ao professor uma postura de mediação. Miguel (2005), assim o explica

[...] Talvez a mais importante implicação teórico-metodológica de uma proposta de formação de conceitos em Matemática seja a compreensão do educador como mediador do processo de construção do conhecimento, criando situações pedagógicas para que a criança exercite a capacidade de pensar e buscar soluções para os problemas apresentados. Através de ações sobre os objetos, inventando e descobrindo relações, estruturando o seu pensamento lógico-matemático [...], é que a criança logrará condições para evolução da representação simbólica da Matemática. Número, operações, resolução de problemas, espaço, forma, tempo, etc. não são noções que se desenvolvem nas crianças apenas mediante repetição, por simplesmente ouvir falar (MIGUEL, 2005, p. 379).

As considerações apresentadas se mostram pertinentes, pois nos levam a refletir sobre diversas questões envolvidas no processo de ensino e de aprendizagem de matemática. Logo, mostra-se relevante para o contexto atual envolto pela pandemia da COVID-19. Nele, pensar sobre o papel do professor, suas ações, importância, instrumentos, limitações e possibilidades tem se tornado desafiador. É sobre isso que trata o tópico a seguir.

2.1.1 O ensino e a aprendizagem na pandemia

O surgimento da pandemia da COVID-19 e sua chegada ao Brasil, além de trazer incalculáveis danos devido às mortes e às questões socioeconômicas, trouxe consigo também consequências ao campo da educação escolar. Como medida de segurança sanitária, a partir de março de 2020 as escolas suspenderam suas atividades presenciais, passando a adotar ações emergenciais baseadas, principalmente, no “[...] uso das tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC) com o objetivo de viabilizar a continuidade das atividades escolares diante da necessidade do isolamento social [...]” (MARQUES, 2020, p. 1).

Desde então, no contexto das escolas municipais de Presidente Kennedy/ES, as ações para continuidade do ano letivo foram coordenadas com base em dois instrumentos fundamentais ao desenvolvimento das atividades remotas, as atividades pedagógicas não presenciais (APNP); são eles:

- Materiais físicos: elaboração, confecção e distribuição de materiais impressos (apostilas) com atividades de todas as disciplinas, entregues a cada estudante em suas respectivas casas, mensalmente;
- Ferramentas virtuais: utilização de tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC) pelos professores e alunos, tais como aplicativos de mensagens instantâneas, videoconferência, armazenamento e compartilhamento de arquivos, criação e compartilhamento de vídeos, *sites*, dentre outras ferramentas que o professor julgasse relevante a utilização.

Especialmente em relação aos anos finais do ensino fundamental, as apostilas foram elaboradas conjuntamente pelos professores regentes de todas as escolas municipais e coordenadores das áreas de conhecimento, em observância ao currículo municipal e à BNCC (BRASIL, 2017). Uma vez elaboradas e impressas, essas apostilas foram distribuídas aos alunos por cada unidade escolar, com atividades previamente planejadas para um mês, levando-se em conta a carga horária de cada disciplina nesse período. Assim, a cada mês, uma nova apostila era entregue e a anterior recolhida.

Quanto às TDIC, as unidades escolares criaram ambientes virtuais (grupos) para cada turma, via aplicativos como o *WhatsApp* para troca de mensagens instantâneas e compartilhamento de arquivos. Dessa forma, coube a cada escola estabelecer dias e horários em que, através da interação nesses grupos, cada

professor em sua disciplina realizasse seu trabalho junto aos alunos. Os grupos eram compostos por: alunos das turmas, professores de cada disciplina, pedagoga e pais ou responsáveis pelos alunos.

Embora sem capacitação específica para esse contexto, coube a cada professor, nos dias e horários específicos definidos para desenvolvimento das suas atividades, escolher as ferramentas que considerasse mais eficientes do ponto de vista da viabilidade de sua manipulação e dos objetivos do ensino e da aprendizagem, ainda que remotamente. Por exemplo, o uso de aplicativos de videoconferência, que permitem a interação dos participantes em tempo real com áudio e vídeo; gravação e compartilhamento de vídeos com aulas sobre os conteúdos, que embora não permitam uma interação em tempo real, possibilitam o acesso à informação em momentos assíncronos.

Dos desafios enfrentados pelos professores nesse novo contexto, e que impactaram diretamente a qualidade do ensino, respaldados em Andrade, Schmidt, Montiel e Zitzke (2020) destacam-se os seguintes:

a falta de capacitação para o uso das ferramentas digitais que, para maioria dos/as professores/as, se deu de forma solitária e/ou com auxílio de colegas. [...] a utilização de recursos próprios para o desenvolvimento das atividades, tais como os dispêndios com energia elétrica, incrementos em planos de internet, a aquisição de equipamentos próprios para a elaboração das aulas e a transformação de suas casas em ambiente de sala aula são, na maior parte das vezes, empreendimentos pessoais (ANDRADE et al, 2020, p. 8).

Desse cenário, novo e desafiador, emergiram algumas limitações e dificuldades que merecem atenção. Marques (2020), contempla as principais e, por isso, a partir de seus escritos são apresentadas algumas encontradas na prática durante o ensino de matemática:

[...] a falta de um contato mais direto com professores e colegas, passando pela dificuldade natural trazida pela transição de modalidade de ensino (presencial para remota), até a impossibilidade de acessar os recursos e atividades, seja pela falta de dispositivos ou de conexão à internet que sejam adequadas a tais demandas (MARQUES, 2020, p. 2).

Em vista disso, são destacadas a seguir os principais problemas que também foram identificadas diretamente na sala de aula. De imediato, a principal dificuldade para parte dos estudantes e suas famílias relacionava-se à não participação deles nos grupos *on-line*, via *WhatsApp*, decorrente da falta de acesso à internet e/ou por não possuírem aparelho celular para uso individual dos estudantes. Essa última

dificuldade, para alguns, foi parcialmente contornada através do uso do aparelho dos pais ou de outros entes familiares, em horários diferentes daqueles estabelecidos para as aulas remotas e atendimentos do professor ao aluno.

Tendo em vista essa realidade, que se fez necessária a distribuição das apostilas físicas, impressas e entregues a todos os alunos. No entanto, tornou-se evidente a dificuldade de aprendizagem enfrentada por esses estudantes e também seus pais ou responsáveis, que em geral davam suporte e estímulo para que os alunos mantivessem as atividades escolares em suas casas.

Sobre isso, Andrade et al (2020) chamam a atenção para o fato de ser a escola o local onde é possível encontrar os diferentes extratos sociais e perceber as desigualdades e diferenças, o que ganhou ainda mais visibilidade no contexto da pandemia quando em muitas famílias se tem, além da falta de aparelhos eletrônicos para realização das atividades remotas, “[...] a falta de tempo e de capacidade dos pais, mães ou responsáveis em auxiliar nas tarefas escolares e a falta, ou inexistência, de espaço adequado no ambiente doméstico [...]” (p. 8).

Diante da falta de acesso a internet e conseqüentemente aos grupos *on-line*, parte dos alunos não acompanhou as aulas e nem recebeu orientações e auxílio dos professores. Por outro lado, alguns alunos, mesmo possuindo acesso aos grupos, por vezes o faziam em horários diferentes daqueles estabelecidos para as aulas, ou não faziam.

Isso evidentemente são significa que aqueles alunos que possuíam acesso e participavam ativamente das aulas por meio dos recursos utilizados pelos professores aprenderam mais ou melhor que os demais. No entanto, ainda que remotamente, por estarem expostos a mais recursos e possibilidades de mediação quanto ao processo de ensino e de aprendizagem, podendo acompanhar as aulas, interagir em tempo real com professores e colegas, esses alunos estiveram melhor amparados do ponto de vista pedagógico.

Já no ano letivo de 2021, embora inicialmente com alguns alunos em sala de aula, cabendo aos pais a decisão pelo envio ou não deles à escola, no mês de março, novamente, houve suspensão das aulas presenciais em virtude do aumento do risco de contaminação pela COVID-19 no município. O modelo adotado nessas primeiras semanas de aulas presenciais se deu pelo revezamento de alunos semanalmente. Para os que se mantinham estudando remotamente, era disponibilizado material

impresso quinzenalmente. Assim, após a nova suspensão das aulas presenciais, retomou-se o modelo posto em prática ao longo de todo o ano letivo de 2020.

No entanto, a partir do segundo trimestre, passou a ser adotado nas escolas municipais o sistema de atendimento presencial individualizado, mediante agendamento, com os alunos se dirigindo à escola para receber auxílio dos professores nas atividades propostas nas apostilas.

A partir da metade do segundo trimestre, a secretaria municipal de educação passou a adotar um novo material didático, substituindo as apostilas até então utilizadas. Esse novo material, do sistema Aprende Brasil, tratava-se de livros consumíveis, disponibilizados aos estudantes em suas casas pelas escolas, conforme feito com as apostilas ao longo do ano letivo de 2020.

Já no final do mês de agosto, com a suspensão das restrições quanto ao retorno físico, as escolas reiniciaram as atividades com os alunos realizando revezamento semanal, de modo que cada turma foi dividida em dois grupos com aproximadamente a mesma quantidade de alunos.

2.2 OS NÚMEROS RACIONAIS E A REPRESENTAÇÃO FRACIONÁRIA

Observando os Parâmetros Curriculares Nacionais – [PCN] (BRASIL, 1997), encontra-se que *números racionais* é um tópico que faz parte dos conteúdos que compõem o currículo de matemática da educação básica desde o quarto ano do ensino fundamental. Este documento nos diz ainda que a construção da ideia de número racional está relacionada à divisão entre dois números inteiros, com divisor diferente de zero. Ou seja, um número racional é todo número que representa o quociente entre dois inteiros quaisquer, com o segundo não nulo. O resultado dessa divisão pode ser escrito na forma a/b (representação fracionária) ou na forma decimal (números com vírgula) (BRASIL, 1997).

Segundo Bertoni (2009), o termo *fração* representa tanto certas partes da unidade quanto o registro numérico associado a essas partes. Por exemplo, pode-se falar em um quarto de melancia ou a parte que corresponde a $1/4$ de uma melancia. Nunes e Bryant (2009) comentam que o termo *fração* frequentemente se refere a quantidades menores que a unidade, cuja representação numérica seria composta de um numerador menor que o denominador, as ditas frações próprias. Já *número*

fracionário seria aquele associado a toda uma classe de frações equivalentes e ocupa uma posição na reta numérica⁴.

Recomenda-se que o ensino de números racionais tenha início, formalmente, no segundo ciclo do ensino fundamental, no quarto ano (BRASIL, 1997; BRASIL, 2017), e se consolide nos dois ciclos finais. Porém, a BNCC (BRASIL, 2017) estaca a importância da abordagem das primeiras noções sobre fração já a partir do terceiro ano, ao propor que os alunos desenvolvam a habilidade de “associar o quociente de uma divisão com resto zero de um número natural por 2, 3, 4, 5 e 10 às ideias de metade, terça, quarta, quinta e décima partes” (BRASIL, 2017, p. 287). Menciona ainda, para o quarto ano, a habilidade de “reconhecer as frações unitárias mais usuais ($1/2$, $1/3$, $1/4$, $1/5$, $1/10$ e $1/100$) como unidades de medida menores do que uma unidade, utilizando a reta numérica como recurso” (BRASIL, 2017, p. 291). Já, para o quinto ano, propõe as seguintes habilidades:

[...] Identificar e representar frações (menores e maiores que a unidade), associando-as ao resultado de uma divisão ou à ideia de parte de um todo, utilizando a reta numérica como recurso; identificar frações equivalentes; comparar e ordenar números racionais positivos (representações fracionária e decimal), relacionando-os a pontos na reta numérica; associar as representações 10%, 25%, 50%, 75% e 100% respectivamente à décima parte, quarta parte, metade, três quartos e um inteiro, para calcular porcentagens, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos de educação financeira, entre outros (BRASIL, 2017, p. 295).

Nessa fase da escolaridade o objetivo principal é “[...] levar os alunos a perceberem que os números naturais, já conhecidos, são insuficientes para resolver determinados problemas [...]” (BRASIL, 1997, p. 67). Desse modo, é importante considerar a abordagem de frações com diferentes significados e representações, em especial os significados parte-todo, quociente e razão, cujas experiências demandam razoável espaço de tempo, de modo que “[...] trata-se de um trabalho que apenas será iniciado no segundo ciclo do ensino fundamental e consolidado nos dois ciclos finais [...]” (BRASIL, 1997, p. 68).

Observando os descritores da Avaliação Nacional do Rendimento Escolar – [ANRESC] (Prova Brasil), avaliação aplicada a cada dois anos a estudantes do quinto e nono ano do ensino fundamental de escolas públicas, sobre números racionais

⁴ Neste texto é usado o termo *fração* se referindo aos *números racionais positivos escritos na forma fracionária* ou *números fracionários*, o que inclui tanto as frações próprias (numerador menor que denominador) quanto frações impróprias (numerador maior que denominador).

encontram-se os itens apresentados na Tabela 1, para a avaliação do 5º ano, no Tema III - Números e Operações / Álgebra e Funções.

Tabela 1 – Descritores relacionados aos Números Racionais na Prova Brasil aplicada no 5º ano

Descritor	Habilidade
D21	Identificar diferentes representações de um mesmo número racional.
D22	Identificar a localização de números racionais representados na forma decimal na reta numérica.
D23	Resolver problema utilizando a escrita decimal de cédulas e moedas do sistema monetário brasileiro.
D24	Identificar fração como representação que pode estar associada a diferentes significados.
D25	Resolver problema com números racionais expressos na forma decimal envolvendo diferentes significados da adição ou subtração.

Fonte: Retirado de Prova Brasil (BRASIL, 2011, p. 108).

Já para a avaliação aplicada ao 9º ano, tem-se os descritores, conforme apresentados na Tabela 2.

Tabela 2 – Descritores relacionados aos Números Racionais na Prova Brasil aplicada no 9º ano

Descritor	Habilidade
D21	Reconhecer as diferentes representações de um número racional.
D22	Identificar fração como representação que pode estar associada a diferentes significados.
D23	Identificar frações equivalentes.
D24	Reconhecer as representações decimais dos números racionais como uma extensão do sistema de numeração decimal, identificando a existência de “ordens” como décimos centésimos e milésimos.
D25	Efetuar cálculos que envolvam operações com números racionais (adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação).
D26	Resolver problema com números racionais envolvendo as operações (adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação).

Fonte: Retirado de Prova Brasil (BRASIL, 2011, p. 153).

Nota-se que a avaliação do 5º ano (ver Tabela 1) enfatiza a abordagem dos números racionais na forma decimal. Já na avaliação do 9º ano (ver Tabela 2) ambas as representações dos números racionais recebem igual atenção, conforme proposto nos PCN para o terceiro e quarto ciclo do ensino fundamental (BRASIL, 1998), onde recomenda-se que ambas as representações dos números racionais, fracionária e decimal, recebam atenção especial, “[...] partindo da exploração de seus significados, tais como: a relação parte/todo, quociente, razão e operador [...]” (p. 66).

Nesse documento (BRASIL, 1998), dentre os conceitos e procedimentos a serem abordados no terceiro ciclo, seguem aqueles relacionados aos números racionais:

Reconhecimento de números racionais em diferentes contextos (cotidianos e históricos) e exploração de situações-problema em que indicam relação parte/todo, quociente, razão ou funcionam como operador; localização na reta numérica de números racionais e reconhecimento de que estes podem ser expressos na forma fracionária e decimal, estabelecendo relações entre essas representações (BRASIL, 1998, p. 71).

Além destes, outros itens podem ser encontrados associados ao cálculo, análise, interpretação, formulação e resolução de situações-problema envolvendo números, inclusive os racionais, tanto no terceiro quanto no quarto ciclo (BRASIL, 1998). Em conformidade com essas recomendações, na BNCC (BRASIL, 2017) apresentam-se os seguintes objetos de conhecimento e as habilidades associadas a eles, sobre números racionais na forma fracionária, a serem desenvolvidas no 6º ano do ensino fundamental, conforme apresenta a Tabela 3.

Tabela 3 – Números Racionais no 6º ano segundo a BNCC

Unidade Temática	Objetos de conhecimento	Habilidades
Números	Frações: significados (parte/todo, quociente), equivalência, comparação, adição e subtração; cálculo da fração de um número natural; adição e subtração de frações	(EF06MA07) Compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros e resultado de divisão, identificando frações equivalentes.
		(EF06MA08) Reconhecer que os números racionais positivos podem ser expressos nas formas fracionária e decimal, estabelecer relações entre essas representações, passando de uma representação para outra, e relacioná-los a pontos na reta numérica.
		(EF06MA09) Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo da fração de uma quantidade e cujo resultado seja um número natural, com e sem uso de calculadora.
Probabilidade e estatística	Cálculo de probabilidade como a razão entre o número de resultados favoráveis e o total de resultados possíveis em um espaço amostral equiprovável	(EF06MA10) Resolver e elaborar problemas que envolvam adição ou subtração com números racionais positivos na representação fracionária.
		(EF06MA30) Calcular a probabilidade de um evento aleatório, expressando-a por número racional (forma fracionária, decimal e percentual) e comparar esse número com a probabilidade obtida por meio de experimentos sucessivos.

Fonte: Retirado da BNCC (BRASIL, 2017, p. 302-305).

Para o 7º ano, os objetos de conhecimento e as habilidades listados, conforme apresentados na Tabela 4 a seguir.

Tabela 4 – Números Racionais no 7º ano segundo a BNCC

Unidade Temática	Objetos de conhecimento	Habilidades
Números	Fração e seus significados: como parte de inteiros, resultado da divisão, razão e operador	(EF07MA08) Comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros, resultado da divisão, razão e operador. (EF07MA09) Utilizar, na resolução de problemas, a associação entre razão e fração, como a fração $\frac{2}{3}$ para expressar a razão de duas partes de uma grandeza para três partes da mesma ou três partes de outra grandeza.
	Números racionais na representação fracionária e na decimal: usos, ordenação e associação com pontos da reta numérica e operações	(EF07MA10) Comparar e ordenar números racionais em diferentes contextos e associá-los a pontos da reta numérica. (EF07MA11) Compreender e utilizar a multiplicação e a divisão de números racionais, a relação entre elas e suas propriedades operatórias. (EF07MA12) Resolver e elaborar problemas que envolvam as operações com números racionais.

Fonte: Retirado da BNCC (BRASIL, 2017, p. 304-307).

Vale destacar, com base tanto nas informações apresentadas na Tabela 3 quanto na Tabela 4, a importância atribuída na BNCC (BRASIL, 2017) à aprendizagem com compreensão de conceitos. Trata-se da apreensão dos significados dos objetos matemáticos como resultado das conexões que devem ser feitas pelos estudantes entre os objetos, seu cotidiano e os diferentes temas matemáticos (BRASIL, 2017).

A seguir, discorre-se sobre o ensino e a aprendizagem dos números racionais com ênfase na importância e nos desafios associados a esse processo, especialmente no que tange aos números fracionários.

2.2.1 Importância e desafios do ensino e da aprendizagem de frações

Segundo os PCNs (BRASIL, 1998), em relação aos conhecimentos adquiridos pelos alunos sobre números racionais no ensino fundamental, constatam-se alguns problemas que, em geral, ocorrem na realidade escolar brasileira, indicando o desafio existente no ensino e na aprendizagem desse tópico matemático.

Embora as representações fracionárias e decimais dos números racionais sejam conteúdos desenvolvidos nos ciclos iniciais, o que se constata é que os alunos chegam ao terceiro ciclo sem compreender os diferentes significados associados a esse tipo de número e tampouco os procedimentos de cálculo [...]. (BRASIL, 1998, p. 100).

Santos (1997) considera que a extensão dos conceitos de números naturais para os racionais é complexa e difícil para os alunos, pois os conceitos com frações são mais abstratos. Dessa forma “[...] é complicado para o aluno compreender que um número racional é representado por dois símbolos numéricos (a/b , onde a e b são isoladamente números) e que este novo símbolo representa uma nova quantidade – um novo número [...]” (p. 103).

Diversos autores (SANTOS, 1994, 1995, 1997; SANTOS; REZENDE, 1996; MERLINI, 2005; BERTONI, 2009; SILVA, 2011; CHEQUETTO, 2016) comentam essa questão e afirmam que boa parte dos alunos apresenta dificuldades ao se abordar o conteúdo de frações em sala de aula. Porém, não havendo uma boa compreensão dos significados associados aos números fracionários, pode-se comprometer a construção da escrita decimal dos números racionais. Além disso, para a sequência da escolaridade, as frações também são essenciais em cálculos algébricos, problemas de geometria ou de grandezas e medidas. Portanto, é necessário que os alunos compreendam os significados e conceitos associados às frações e saibam usá-los em contextos apropriados (MANDARINO, 2010).

Também os PCNs (BRASIL, 1997) relacionam alguns obstáculos enfrentados pelos alunos ao raciocinarem com os números racionais, especialmente quando escritos na forma fracionária. Tais números acabam sendo tratados como se fossem naturais, apresentam dificuldade de visualizar o conceito de equivalência entre frações além problemas ao comparar frações cujos denominadores são diferentes, o que também se relaciona ao conceito de equivalência de frações.

Observam-se na prática docente essas dificuldades mencionadas anteriormente dentre outras, em alunos de diversos anos do ensino fundamental. Esses obstáculos são próprios dos números racionais e precisam ser levados em consideração pelo professor, pois “[...] a aprendizagem dos números racionais supõe rupturas com ideias construídas pelos alunos acerca dos números naturais, e, portanto, demanda tempo e uma abordagem adequada” (BRASIL, 1997, p. 67).

No que se refere à equivalência de frações, Nunes et al (2008) dizem que se trata de um conceito que desempenha um papel central em relação aos números

racionais, com importância e implicações que justificam a escolha em tomá-lo como objeto de estudo da presente pesquisa. Como conceito fundamental, se não for bem compreendido pelos alunos, pode acarretar dificuldades para resolver problemas que envolvem comparação, ordenação, simplificação e operações com frações, com destaque à adição e subtração (TOLEDO; TOLEDO, 2009).

Segundo Giovanni Júnior e Castrucci (2018a, p. 142), “[...] duas ou mais frações que representam a mesma porção da unidade são chamadas de frações equivalentes”. Embora escritas simbolicamente de forma diferente, frações são ditas equivalentes se representam a mesma quantidade em relação ao mesmo inteiro, conforme explica Bertoni (2009):

Podemos imaginar as frações $1/2$, $2/4$, $3/6$, $4/8$, ... $45/90$ etc como diferentes, num certo sentido, mas equivalentes. Todas representam uma mesma quantidade (de uma mesma unidade). Portanto, a todas deve ser associado um mesmo número. O que complica é que não temos um símbolo diferente para distinguir o número fracionário associado a essa classe. Ele se confunde com o símbolo de qualquer fração da classe, embora muitas vezes seja usada a fração que tem o menor numerador e o menor denominador (no caso, $1/2$) (BERTONI, 2009, p. 23).

Dentre as possíveis aplicações do conceito de equivalência de frações, existe a participação fundamental na adição e subtração de números fracionários, conforme indicado por Giovanni Júnior e Castrucci (2018a). Vejamos:

Para adicionar ou subtrair números representados por frações que têm denominadores diferentes, primeiro encontramos frações equivalentes às frações dadas que tenham um denominador comum. Em seguida, efetuamos a adição ou a subtração com essas frações (GIOVANNI JÚNIOR; CASTRUCCI, 2018a, p. 152).

É possível elencar outro aspecto importante e problemático dentro do contexto do ensino e da aprendizagem de frações no ensino fundamental, que é a ênfase à memorização de regras. Bertoni (2009) chama a atenção para esse fato, e argumenta que a memorização de regras como, por exemplo, “[...] para somar duas frações de mesmo denominador, conservamos o denominador e somamos os numeradores” (p. 83), acaba dificultando o entendimento de noções simples.

Especialmente no caso da adição e subtração de frações com denominadores diferentes, cujo procedimento de cálculo indicado anteriormente foi extraído da obra de Giovanni Júnior e Castrucci (2018a), encontra-se tanto na prática como em livros didáticos o uso de procedimentos voltados à memorização de regras, que suprimem

a utilização do conceito de equivalência de frações. Um exemplo é indicado na Figura 1, extraído de Giovanni Júnior e Castrucci (2018b).

Figura 1 – Exemplo de adição de números racionais

3 Determinar o valor da expressão $\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right) + \left(-1 + \frac{5}{6}\right)$.

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{3}{4} - 1 + \frac{5}{6} \rightarrow \text{eliminamos os parênteses}$$

Calculando o mmc dos denominadores, temos: $\text{mmc}(2, 3, 4, 6) = 12$.

$$\frac{4}{12} + \frac{6}{12} - \frac{9}{12} - \frac{12}{12} + \frac{10}{12} \rightarrow \text{dividimos o mmc por cada denominador das frações e multiplicamos pelos numeradores correspondentes}$$

$$\frac{4 + 6 - 9 - 12 + 10}{12} = -\frac{1}{12} \rightarrow \text{adicionamos algebricamente os numeradores}$$

Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2018b, p. 104).

Embora tais procedimentos simplifiquem a tarefa do professor e agilizem a resolução da operação (considerando que seja memorizado pelo aluno), em termos de compreensão de conceitos tende a distanciar o aluno da compreensão sobre o papel da equivalência de frações nessas operações. Além disso, ao recorrer a tais regras práticas, o professor parcialmente inutiliza o tempo empregado em se apresentar e discutir frações equivalentes nas aulas, já que não as utiliza na adição e subtração de frações de denominadores diferentes. Argumento semelhante pode ser empregado diante da não aplicação do conceito de equivalência na comparação e na ordenação de frações com denominadores diferentes (BERTONI, 2009). Sobre isso, Bertoni (2009) argumenta que é pouco o tempo dedicado ao estudo sobre frações, sendo este um fator associado à não compreensão adequada do assunto por parte do aluno. A autora afirma que

[...] presume-se que os alunos possam adquirir competências de compreender esses números, estabelecer relações, operar com eles e resolver problemas durante dois bimestres – um no 4º ano e outro no 5º ano. Visa-se à formação do aluno-calculadora – não importando o que ele entenda ou não, mas bastando que consiga realizar qualquer operação com os números naturais, fracionários, decimais (BERTONI, 2009, p. 28).

Diante da dificuldade apontada, relacionada ao pouco tempo dedicado ao estudo das frações, essa autora propõe que sejam as primeiras noções de fração

apresentadas desde a educação infantil, ampliando assim o tempo de contato do aluno com o tema (BERTONI, 2009).

Por tudo isso, frações tem sido um dos temas mais difíceis no ensino fundamental (BEHR et al, 1983), com avaliações e pesquisas atestando o baixo rendimento dos alunos no assunto (BERTONI, 2009; SILVA, 2011; CHEQUETTO, 2016). No entanto, apesar das dificuldades e dos problemas relacionadas ao ensino e a aprendizagem dos números racionais apresentados até aqui, Bertoni (2009) aponta para a importância desse tópico na matemática, por ele estar associado à diversos assuntos como, por exemplo, razões, probabilidades, raciocínio proporcional e cálculo algébrico, ainda que tenham pouca presença no cotidiano, o que acaba dificultando o contato do aluno com esses números no dia a dia, conforme apresentado pelos PCNs (BRASIL, 1997) quando, em comparação com os números racionais na forma decimal, diz que “o contato com representações fracionárias é bem menos frequente; na vida cotidiana o uso de frações limita-se a metades, terços, quartos e mais pela via da linguagem oral do que das representações” (BRASIL, 1997, p. 68).

2.2.2 As frações e seus significados

Os PCNs (BRASIL, 1997) orientam que as primeiras noções de número racional, no segundo ciclo do ensino fundamental, sejam introduzidas por meio da exploração de diferentes significados de fração, com destaque aos significados *parte-todo*, *quociente* e *razão*. No entanto, a BNCC (BRASIL, 2017) destaca que também seja abordada a noção de fração como *número*, ao mencionar a habilidade de “comparar e ordenar números racionais positivos (representações fracionária e decimal), relacionando-os a pontos na reta numérica” (p. 295).

No significado *parte-todo*, uma fração expressa a relação existente entre o número de partes tomadas e o total delas, nas quais um todo ou inteiro foi repartido. Este todo pode ser uma quantidade contínua, como o volume de algum líquido, uma barra de chocolate, um fio de metal; ou discreta, como um conjunto de bolas de gude, livros, cadeiras (BRASIL, 1997; SILVA, 2011). Neste sentido, o denominador da fração indica em quantas partes iguais o todo foi dividido, e o numerador indica quantas dessas partes foram tomadas. Sendo assim, procedimentos de dupla contagem

conduzem à representação de uma fração a partir de uma situação dada (MERLINI, 2005).

Nota-se que normalmente, no ensino de frações, se privilegia esse significado em detrimento dos demais. Esse é o significado de fração que é mais lembrado tanto por alunos quanto por professores. Além disso, da prática docente percebe-se que normalmente os livros didáticos iniciam o estudo das frações por meio deste significado (MERLINI, 2005; SILVA, 2011; CHEQUETTO, 2016).

O significado *quociente* ou *divisão* surge quando se tem presente a ideia de repartir quantidades. A fração tanto indica a operação a ser feita para resolver o problema (divisão) quanto representa seu resultado, o quociente entre a quantidade da grandeza representada pelo numerador e a representada pelo denominador, que podem, inclusive, ser grandezas distintas (MERLINI, 2005; SILVA, 2011).

Por exemplo, observe as seguintes situações adaptadas do texto de Merlini (2005, p. 24): (1) *Divida duas barras de chocolate para três pessoas. Que fração representa o que cada pessoa recebeu de chocolate?* A fração $2/3$ representa tanto a operação como a quantia de chocolate que cada um irá receber, ou seja, o resultado da divisão. Note que as grandezas são diferentes, chocolate e pessoas; (2) *Tenho 30 bolas de gude e desejo dividir igualmente entre 5 crianças. Quanto cada uma receberá?* Neste caso a divisão é $30:5$, cujo resultado (6), pode ser representado pela fração $30/5$. Como se trata da divisão de uma grandeza discreta, não faria sentido um valor de bolinhas que não fosse divisível pela quantidade de crianças.

Sobre o significado *razão*, Silva (2011) destaca que se trata de uma comparação entre quantidades, que pode ser feita entre uma parte e um todo, confundindo-se com o significado parte-todo; entre duas partes de um todo (parte-parte) e ainda relacionada a ideia de probabilidade. Como exemplos da utilização do significado de fração como razão tem-se as escalas, porcentagem e proporções, por exemplo.

Além desses, Bertoni (2009) destaca os significados *medida* e *operador multiplicativo*, compondo assim os cinco significados apontados por Kieren (1988), tomados como básicos: parte-todo, medida, operador multiplicativo, razão e quociente.

Segundo Merlini (2005), no significado *operador multiplicativo* uma fração assume o papel de transformador, modificando um valor dado, reduzindo-o ou ampliando-o. Normalmente, este significado aparece nos livros didáticos em tópicos

intitulados “fração de uma quantidade”, quantidade essa que pode ser tanto discreta como contínua. Bertoni (2009) traz o significado de fração como *medida* quando existe um termo de comparação entre duas quantidades de uma mesma grandeza, de modo que uma fração represente “quantas vezes” uma quantidade cabe em outra tomada como referência.

2.3 IMAGEM CONCEITUAL E DEFINIÇÃO DO CONCEITO

Neste tópico serão abordadas as ideias sobre *imagem conceitual e definição do conceito*⁵, que formam a base teórica para as análises desenvolvidas na pesquisa, tendo como principal referência a perspectiva de David Tall e Shlomo Vinner, exposta em 1981 no artigo intitulado *Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity*, “[...] texto mais referenciado em pesquisas que tratam dessa temática [...]” (ZANON, 2019, p. 87), no qual fizeram uma apresentação de tais ideias no contexto dos conceitos de limite e continuidade de funções e sequências.

Segundo Tall e Vinner (1981), a complexidade dos processos cognitivos da mente humana fornece uma fonte de motivação para a busca de compreensão acerca de como ocorrem esses processos, e neste sentido propõem “[...] uma distinção entre conceitos matemáticos formalmente definidos e os processos cognitivos pelos quais eles são concebidos [...]” (TALL; VINNER, 1981, p. 151, tradução nossa⁶), isto é: de um lado a matemática formal e de outro a matemática enquanto atividade mental de quem recebe tal conhecimento (TALL; VINNER, 2002; ZANON, 2019), numa relação conflituosa (VINNER, 2002).

Assim, definem *imagem conceitual* como a

estrutura cognitiva total associada ao conceito, que inclui todas as imagens mentais e propriedades e processos associados. Ela é construída ao longo dos anos através de experiências de todos os tipos, mudando à medida que o indivíduo encontra novos estímulos e amadurece. (TALL; VINNER, 1981, p. 152, tradução nossa⁷).

⁵ tradução nossa das expressões em inglês *concept image* e *concept definition*.

⁶ [...] a distinction between the mathematical concepts as formally defined and the cognitive processes by which they are conceived.

⁷ [...] total cognitive structure we associated with the concept, which includes all the mental pictures and that is years through properties and processes. It is built up over the associated experiences of all kinds, changing as the individual meets new stimuli and matures.

Segundo Zanon (2019, p. 92), “[...] a imagem conceitual depende de uma pessoa e de um conceito do qual a pessoa fala [...]” e, conforme exposto, na mente do indivíduo, uma imagem conceitual sobre um determinado conceito é composta de: imagens mentais, propriedades e processos. Por *imagem mental* de um conceito, Vinner (1983) esclarece que se trata de uma expressão que, tomada num sentido amplo, “[...] inclui qualquer representação visual do conceito [...]” (p. 293, tradução nossa⁸), como gráficos, símbolos, diagramas, imagens ou qualquer outro tipo de representação (VINNER; DREYFUS, 1989).

Com relação a *propriedades*, “[...] por exemplo, alguém pode pensar que a altura em um triângulo deve sempre estar dentro do triângulo, bem como pode pensar que as funções devem sempre ser definidas por meio de expressões algébricas [...]” (VINNER, 1983, p. 293, tradução nossa⁹). Ou seja, são “[...] todos os atributos que caracterizam determinado conceito, sejam conscientes, sejam inconscientes [...]” (ZANON, 2019, p. 91).

E quanto a *processos*, Zanon (2019) o designa como

[...] uma possível articulação entre imagens e propriedades que podem ser externalizadas mediante uma representação. Acredita-se que, ao indagar uma pessoa, dela é exigida uma resposta que geralmente é dada pela articulação simultânea de imagens e propriedades. Desse modo, evoca-se uma imagem que busca responder às coisas (questões, tarefas, entre outros) (ZANON, 2019, p. 91).

No entanto, à medida em que se desenvolve, uma imagem conceitual pode não ser sempre coerente (TALL; VINNER, 1981), entendendo-se por imagens conceituais coerentes “[...] aquelas que mais se aproximam do conhecimento matemático formal. Do contrário, referem-se a imagens conceituais incoerentes [...]” (ZANON, 2019, p. 93). Isto porque no processo de desenvolvimento de imagens conceituais, “[...] diferentes estímulos podem ativar diferentes partes da imagem conceitual, desenvolvendo-as de uma forma que não precisa fazer um todo coerente [...]”, uma vez que, em nosso cérebro, “[...] a entrada sensorial excita certas vias neuronais e inibe outras [...]” (TALL, VINNER, 1981, p. 152, tradução nossa¹⁰).

⁸ [...] includes any visual representation of the concept.

⁹ [...] for instance, somebody might think that an altitude in a triangle should always fall inside the triangle. He might think that functions should always be defined by means of algebraic expressions.

¹⁰ sensory input excites certain neuronal pathways and inhibits others. [...] different stimuli can activate different parts of the concept image, developing them in a way which need not make a coherent whole.

Então, as imagens conceituais evocadas, termo que designa uma parte da imagem conceitual que é ativada no momento do recebimento de um estímulo, em momentos particulares podem ser aparentemente conflitantes, de modo que quando ocorrem simultaneamente causam confusão (TALL; VINNER, 1981; ZANON, 2019).

Sobre *definição do conceito*, Tall e Vinner (1981, p. 152) apresentam como sendo

[...] uma forma de palavras usadas para especificar o conceito. Pode ser aprendido por um indivíduo de uma forma rotineira ou mais significativamente aprendido e relacionado, em maior ou menor grau, ao conceito como um todo. Pode também ser uma reconstrução pessoal pelo aluno de uma definição. É então a forma de palavras que o aluno usa para sua própria explicação da imagem conceitual (evocada). Se a definição do conceito é dada a ele ou construída por ele mesmo, ela pode variar de vez em quando. Desta forma, uma definição do conceito pessoal pode diferir de uma definição de conceito formal, sendo esta última uma definição de conceito que é aceita pela comunidade matemática em geral (tradução nossa¹¹).

Nas palavras de Zanon (2019, p. 96), a definição do conceito “[...] se refere à descrição do conceito matemático formal por meio de palavras. Isso quer dizer que seria a forma verbalizada da imagem conceitual evocada [...]”, bem como “[...] a verbalização da compreensão, neste caso, do aluno sobre o conceito”, aproximando-se do conceito formal ou não. Assim, diante de uma definição do conceito, o aluno gera uma imagem da definição do conceito (TALL; VINNER, 1981) que, ao ser apresentada por ele, reflete sua compreensão acerca do conceito, a maneira como ele o explica. Essa compreensão pode variar quanto a relação com o conceito formal conforme o modo pelo qual o conceito foi aprendido, podendo ser uma definição a ele dada ou ser uma imagem conceitual da definição do conceito resultante de uma reconstrução pessoal sobre o conceito (ZANON, 2019).

Sobre o exposto anteriormente, para Tall e Vinner (1981) a imagem da definição do conceito é parte da imagem conceitual, podendo em alguns indivíduos “[...] ser vazia, ou praticamente inexistente. Em outros, pode ou não estar coerentemente relacionada com outras partes da imagem conceitual [...]” (p. 153,

¹¹ [...] a form of words used to specify that concept. It may be learnt by an individual in a rote fashion or more meaningfully learnt and related to a greater or lesser degree to the concept as a whole. It may also be a personal reconstruction by the student of a definition. It is then the form of words that the student uses for his own explanation of his (evoked) concept image. Whether the concept definition is given to him or constructed by himself, he may vary it from time to time. In this way a personal concept definition can differ from a formal concept definition, the latter being a concept definition which is accepted by the mathematical community at large.

tradução nossa¹²). Quanto a isso, os autores alertam sobre os riscos de se ter uma imagem conceitual restrita, baseada apenas em fórmulas, por exemplo, enquanto que na estrutura cognitiva a definição do conceito permanece desativada:

Inicialmente, o estudante nesta posição pode operar bastante feliz com sua noção restrita adequada em seu contexto restrito. Ele pode até ter sido ensinado a responder com a definição formal correta enquanto possuía uma imagem conceitual inadequada. Mais tarde, quando ele encontra funções definidas em um contexto mais amplo, ele pode ser incapaz de lidar. No entanto, o próprio programa de ensino foi responsável por esta situação infeliz (TALL; VINNER, 1981, p. 153, tradução nossa¹³).

Segundo Tall (1988, p. 39), “[...] se a imagem baseia-se em experiências que entram em conflito com a definição formal, isso pode levar a respostas que estão em desacordo com a teoria formal [...]” (tradução nossa¹⁴), situação considerada como um caso mais grave de *fator de potencial conflito*, expressão cunhada por Tall e Vinner (1981) para designar uma parte da imagem conceitual ou da definição do conceito que pode entrar em conflito com outra parte da imagem conceitual ou da definição do conceito. Sobre tal situação mais grave de fator de potencial conflito, os autores ainda destacam a possibilidade de ser um fator capaz de comprometer a aprendizagem da teoria formal.

Com relação às implicações decorrentes do conhecimento sobre imagens conceituais dos alunos ao ensino e aprendizagem em matemática, Zanon (2019, p. 142) destaca que tal conhecimento “[...] permite que professores acessem imagens conceituais distintas, vejam como o conceito se desenvolve em diferentes perspectivas e pensem em formas diversificadas de ensino, aprendizagem e avaliação [...]”. Sobre isso, Vinner (1983, p. 297) acredita que:

[...] revelar as imagens conceituais de nossos alunos torna-se muito importante para ensino; não só pode nos dar uma melhor compreensão de nossos alunos (sabendo o que os levou a agir como agiram), mas também

¹² [...] it may be empty, or virtually non-existent. In others it may, or may not be coherently related to other parts of the concept image.

¹³ Initially, the student in this position can operate quite happily with his restricted notion adequate in its restricted context. He may even have been taught to respond with the correct formal definition whilst having an inappropriate concept image. Later, when he meets functions defined in a broader context he may be unable to cope. Yet the teaching program me itself has been responsible for this unhappy situation.

¹⁴ If the image is built on experiences that conflict with the formal definition, this can lead to responses which are at variance with the formal theory.

pode sugerir algumas melhorias ao nosso ensino que formou tais imagens conceituais erradas (tradução nossa¹⁵).

Logo, tendo em vista a variedade de imagens conceituais individuais, Tall (1988, p. 40, tradução nossa¹⁶) comenta que, sobre o ensino, “[...] não é simplesmente um caso de transmissão do conhecimento matemático de uma maneira formal. A alternativa é dar aos estudantes experiências mais ricas de modo que eles sejam capazes de formar um conceito mais coerente [...]”, por meio da apresentação de exemplos e contraexemplos, que

[...] problematizados e discutidos para que eles entendam e forneçam argumentos quando identificam que os exemplos satisfazem uma definição matemática formal e quando eles seriam contraexemplos. Com várias experiências envolvendo um conceito matemático os estudantes podem ser capazes de formar um conceito que tenha coerência (ZANON, 2019, p. 98).

Isto por que uma abordagem formal sobre um determinado assunto matemático só tende a obter sucesso na medida em que o estudante seja capaz de lidar com formalidades (VINNER, 1983; TALL, 1988), sendo que “[...] não é sensato esperar que os alunos sejam capazes de argumentar logicamente a partir de definições de conceito sem esperar a interferência de suas imagens conceituais individuais [...]” (TALL, 1988, p. 40, tradução nossa¹⁷). Quanto a isso, Vinner (1983) afirma que:

(1) a fim de lidar com conceitos, é necessária uma imagem de conceito e não uma definição de conceito, (2) definições de conceito (onde o conceito foi introduzido por meio de uma definição) permanecerão inativos ou até mesmo serão esquecidos. Ao pensar, quase sempre a imagem conceitual será evocada. (p. 293, tradução nossa¹⁸).

A influência do tempo no processo de aquisição de um conceito é um fator fundamental, uma vez que não ocorre num passo, pois “[...] vários estágios precedem a aquisição completa e domínio de um conceito complexo [...]” (VINNER; DREYFUS, 1989, p. 365, tradução nossa¹⁹). Além disso, durante esse processo:

¹⁵ [...] revealing the concept images of our students becomes very important for teaching; not only might it give us a better understanding of our students (knowing what caused them to act as they acted) but also it might suggest some improvements to our teaching which formed such wrong concept images.

¹⁶ [...] is not simply a case of passing on mathematical knowledge in a formal way. The alternative is to give the students richer experiences so that they are able to form a more coherent concept.

¹⁷ [...] is not sensible to expect students to be able to argue logically from concept definitions without expecting interference from their individual concept images.

¹⁸ (1) In order to handle concepts one needs a concept image and not a concept definition. (2) Concept definitions (where the concept was introduced by means of a definition) will remain inactive or even be forgotten. In thinking, almost always the concept image will be evoked.

¹⁹ Several stages precede the complete acquisition and mastery of a complex concept.

[...] alguns comportamentos peculiares tendem a ocorrer. Vários esquemas cognitivos, alguns até mesmo em conflito uns com os outros, podem agir na mesma pessoa em diferentes situações que estão intimamente relacionadas no tempo. O conhecimento desses esquemas cognitivos particulares pode tornar o professor mais sensível às reações dos alunos e, assim, melhorar a comunicação (VINNER; DREYFUS, 1989, p. 365, tradução nossa²⁰).

Tendo em vista essas considerações, é possível que ao desvelar e analisar imagens conceituais dos estudantes sobre frações equivalentes, pode-se compreender melhor as estratégias utilizadas por eles para lidar com o assunto. Esse conhecimento levaria a reflexão acerca de alternativas ao processo de ensino e de aprendizagem, tendo em vista mudanças a fim de melhorias.

2.4 REVISÃO DE LITERATURA

Apresenta-se, a seguir, uma revisão de literatura com o intuito de aprofundar os conhecimentos sobre o ensino e a aprendizagem de frações equivalentes, especialmente por meio das contribuições advindas da produção acadêmica sobre o tema, quanto nos permitir saber o estado em que se encontra a pesquisa na área. Uma revisão de literatura como esta oferece uma coletânea de metodologias inspiradoras, bem como de referências bibliográficas, enriquecendo assim o presente estudo.

São muitas as pesquisas que apontam para os problemas e dificuldades enfrentados tanto por estudantes como por professores quanto ao ensino e aprendizagem de frações, especialmente no ensino fundamental quando o assunto é introduzido nos anos iniciais (2º ciclo), e retomado e desenvolvido nos anos seguintes (3º ciclo), sendo essas dificuldades provenientes de diversos motivos.

Buscou-se por pesquisas relacionadas aos números racionais na forma fracionária, enfatizando aquelas inseridas no contexto do ensino e da aprendizagem de frações equivalentes no ensino fundamental, que investiguem alternativas para possíveis soluções às dificuldades enfrentadas tanto por estudantes como por professores diante desse assunto.

²⁰ [...] some peculiar behaviors are likely to occur. Several cognitive schemes, some even conflicting with each other, may act in the same person in different situations that are closely related in time. The knowledge of these particular cognitive schemes may make the teacher more sensitive to students' reactions and thus improve communication.

Dentre os principais assuntos abordados em pesquisas sobre o ensino e aprendizagem de frações, as relacionadas com a formação de professores procuram elucidar as lacunas nessa formação e as conseqüentes limitações e dificuldades na prática do ensino desse conteúdo, bem como sugestões para esses entraves.

Sobre esse assunto, Lopes (2017), em sua dissertação intitulada “**Movimento formativo de professores dos anos iniciais sobre diferentes significados de frações e suas relações com o ensino**”, apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática (EDUCIMAT) do Ifes, buscou analisar o movimento formativo de professores, na perspectiva histórico-cultural, quanto aos diferentes significados de fração e suas relações com o ensino em formação docente. A pesquisa se desenvolveu a partir do planejamento e execução de um curso de extensão sobre frações, destinado a professores que atuam nos anos iniciais do ensino fundamental. Intitulado “(RE)descobrimo frações e seus significados” e com 24 professores participantes, o curso proporcionou a produção de dados para a pesquisa, com a proposta de promover um espaço de formação de professores dos anos iniciais do ensino fundamental de escolas públicas, para investigar, discutir/explorar práticas, identificar conhecimentos sobre o conceito de frações e seus diferentes significados.

A pesquisa apontou para a prevalência, entre os professores, do conhecimento sobre frações significando parte de um todo, o que foi se modificando ao longo do curso, impactando inclusive as práticas de alguns professores participantes do curso. Por fim, a pesquisa resultou na sistematização de um livro com propostas de formação continuada inserindo atividades para o ensino de frações e seus diferentes significados nos anos iniciais.

Já Damico (2007), em sua tese intitulada “**Uma investigação sobre a formação inicial de professores de matemática para o ensino de números racionais no ensino fundamental**”, apresentada à Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC/SP), pesquisou sobre a formação inicial de professores de matemática em formação com relação aos conhecimentos para o ensino de números racionais no ensino fundamental.

A pesquisa, que envolveu 346 estudantes de licenciatura em matemática, trouxe resultados que, em síntese, indicam uma visão sincrética acerca dos números racionais por parte dos professores em formação, sobressaindo conhecimentos procedimentais aos conceituais, além de um descompasso entre os conhecimentos

dos professores e aqueles necessários à docência no ensino fundamental. Isso vai de encontro a um dos principais problemas relacionados ao ensino-aprendizagem de frações, a ênfase na utilização de regras e algoritmos (GARCEZ, 2013), desvinculados dos conceitos envolvidos. Tem-se aqui um problema, desde que o objetivo do ensino seja a compreensão conceitual sobre frações e não apenas procedimental, uma vez que aprender regras e procedimentos não garante aprendizagem sobre o conceito (NUNES; BRYANT, 2009).

Especialmente sobre a equivalência de frações e tópicos relacionados, como a comparação, ordenação, adição e subtração de frações, algumas pesquisas recentes se relacionam e se aproximam do presente trabalho. Essas, reconhecendo a relevância do assunto, desenvolveram investigações de propostas metodológicas e didáticas para a abordagem em sala de aula.

Martinho (2020), em sua dissertação intitulada **“O ensino de equivalência de frações para compreensão das operações de adição e subtração”**, apresentada ao Mestrado Profissional em Educação e Docência da Universidade Federal de Minas Gerais (Promestre/UFMG), investigou como a ideia de equivalência de frações, com o apoio de materiais manipuláveis, pode contribuir para a compreensão das operações de adição e subtração, por parte de alunos do 7º ano do ensino fundamental.

Por meio da utilização de materiais manipuláveis e de uma sequência didática formada por nove tarefas que abordavam equivalência, comparação, adição e subtração de frações, aplicada a um grupo de trinta e oito estudantes, o autor relata as dificuldades iniciais dos estudantes com relação a diversos aspectos sobre as frações, embora estando eles no 7º ano e, teoricamente, já tendo estudado esses assuntos no 5º e 6º ano. No entanto, o autor observou que a maioria dos participantes compreendeu os assuntos trabalhados, o que atribuiu ao uso dos materiais manipuláveis e jogos e à forma como as aulas foram conduzidas.

Semelhantemente, os trabalhos de Garcez (2013) e de Faasen (2017), apresentados ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), propõem alternativas metodológicas para o ensino de frações, com ênfase no conceito de equivalência, por meio da aplicação de sequências didáticas.

Garcez (2013), cujo trabalho de conclusão de curso intitula-se **“Tópicos sobre o ensino de frações: equivalência”**, apresenta uma sequência didática baseada em

cinco atividades que focam o ensino do conceito de equivalência de frações, conduzindo os alunos a três objetivos: (1) identificar frações equivalentes; (2) compreender que frações equivalentes são maneiras diferentes de representar uma mesma quantidade; (3) determinar outras frações equivalentes a uma fração dada, de acordo com as condições estabelecidas.

Já Faasen (2017), em sua dissertação intitulada “**Análise de uma proposta pedagógica de construção e aplicação de dominó de frações equivalentes**”, como o título já sugere, propôs a construção e aplicação do jogo dominó de frações equivalentes numa turma de 6º ano do ensino fundamental, procurando avaliar os impactos na aprendizagem do conceito em questão.

Diversas pesquisas nas últimas décadas destacaram que práticas baseadas na abordagem de uma variedade de ideias e situações associadas às frações podem contribuir para a efetiva compreensão sobre o tema (GARCEZ, 2013; CANOVA, 2013; BERTONI, 2009), oferecendo possibilidades de superação das dificuldades de aprendizagem no ensino fundamental. No entanto, o que normalmente se tem, especialmente no Brasil, é a ênfase ao significado parte-todo, que normalmente é a primeira interpretação sobre frações abordada na escola, ainda que seja constatado que introduzir o conceito de fração por meio do significado quociente produz melhores resultados quanto a compreensão por parte das crianças (CANOVA, 2013), inclusive em relação aos conceitos de equivalência e ordenação de frações (NUNES; BRYANT, 2009).

Como resultado dessa realidade, observam-se dificuldades de o aluno compreender e utilizar outros significados e conceitos, já que na maioria das vezes eles não irão transferir espontaneamente o conhecimento aprendido numa situação para outra (NUNES; BRYANT, 2009).

Sobre a importância da abordagem de diferentes significados de fração no ensino, Canova (2013), com a tese “**Um estudo das situações parte-todo e quociente no ensino e aprendizagem do conceito de fração**” apresentada à Universidade Bandeirante Anhanguera, investigou as contribuições do ensino de fração a partir das situações parte-todo ou quociente à aprendizagem de alunos do 4º, 5º e 6º anos, com vistas a um melhor desempenho na resolução de problemas envolvendo frações, ficando constatado que os dois tipos de situação favorecem a aprendizagem, ainda que dentro dos limites da metodologia adotada bem como dos sujeitos participantes, o que não se deve perder de vista.

Embora abordando apenas dois dos significados de fração, parte-todo e quociente, a experiência realizada pela autora mostrou com objetividade os efeitos advindos da metodologia adotada, facilitando a compreensão dos resultados e reforçando a importância da abordagem de múltiplos significados de fração num processo de ensino-aprendizagem que busque a compreensão de conceitos e não apenas memorização de técnicas e algoritmos, além de confirmar a possibilidade de compreensão e sucesso em situações onde não se faz necessário o uso da notação formal, como também exposto por Nunes e Bryant (2009) e defendido por Bertoni (2009).

Ainda em relação à importância da abordagem dos múltiplos significados de fração no processo de ensino-aprendizagem, o trabalho de Silva (2011), intitulado **“O ensino de matemática na escola pública: uma (inter)invenção pedagógica no 7º ano com o conceito de fração”** e apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal do Espírito Santo (PPGE/Ufes), buscou compreender as estratégias e raciocínios utilizados por trinta e seis alunos do 7º ano do ensino fundamental, durante um processo de intervenção pedagógica, retomando o conceito de fração estudados em anos anteriores. A intervenção consistiu na aplicação de uma sequência didática composta de 39 aulas com atividades que buscavam compreender as estratégias utilizadas pelos alunos no desenvolvimento de atividades sobre frações, tanto individualmente quanto em grupo, e avaliar alguns processos cognitivos deles quanto aos significados de fração (parte-todo, razão, quociente e operador multiplicativo).

O autor defende que há necessidade de, no processo de ensino-aprendizagem, se explorar a compreensão dos números racionais em várias situações e em diferentes contextos e que uma sequência de ensino que interfere no contexto cultural e social do aluno tem potencial de contribuir para que eles compreendam alguns significados de fração, em especial a ideia de fração como parte-todo de conjuntos contínuos e discretos.

Outra contribuição vem de Chechetto (2016), autor da dissertação **“Uma experiência didática para a aprendizagem de frações: matemática para residentes de uma casa de passagem”**, apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino na Educação Básica do Centro Universitário Norte do Espírito Santo (PPGEEB/CEUNES/Ufes), em que desenvolveu uma experiência didática com adolescentes residentes na Casa de Passagem de São Mateus/ES, com o objetivo de

investigar quais aspectos poderiam emergir da realização de uma experiência didática na aprendizagem de frações. Inicialmente, o pesquisador constatou, assim como Silva (2011), que nas ideias que os residentes tinham sobre frações, sobressaia o significado parte-todo. Além disso, notou que eles não compreendiam o conceito de equivalência e de ordenação, aspectos fundamentais quanto aos números fracionários. Isso o motivou a elaborar e desenvolver uma sequência didática pautada em jogos e materiais manipuláveis úteis à mediação do aprendizado de frações e de alguns de seus diferentes significados (parte-todo, quociente e operador multiplicativo).

Os resultados da experiência indicaram que, em relação à aprendizagem, o significado parte-todo pareceu ter se consolidado enquanto que os outros ficaram comprometidos, além de serem entendidas as noções básicas dos conceitos de equivalência e ordenação, necessitando-se serem revistos posteriormente. Além disso, a vulnerabilidade social e a desestruturação familiar se mostraram fatores relacionados a falta de interesse dos residentes pelos estudos.

As pesquisas apresentadas mostraram possibilidades metodológicas inspiradoras que podem auxiliar professores quanto ao ensino de frações e frações equivalentes em diferentes contextos dos anos finais do ensino fundamental, apresentando um arcabouço teórico que contribui para reflexões acerca do tema, além de ajudar a estruturar a investigação.

3 PERCURSO METODOLÓGICO

Para construção do deste capítulo, procurou-se descrever a pesquisa e o percurso seguido para o seu desenvolvimento, tendo em vista os objetivos traçados e a abordagem à realidade na qual se insere seu objeto de estudo, imagens conceituais sobre frações equivalentes.

Assim, o presente estudo se caracteriza como uma pesquisa de campo de caráter qualitativo, tendo em vista que as informações que se buscava sobre a realidade na qual se insere a pesquisa, as imagens conceituais sobre frações equivalentes, não são passíveis de quantificação (MINAYO, 2002). Enquanto pesquisa de campo, tomou-se como referência a concepção de Fiorentini e Lorenzato (2007) que identificam tal modalidade de investigação como aquela em que a coleta de informações é feita diretamente no local onde o fenômeno estudado ocorre, por meio de entrevistas, observação e questionários, por exemplo, dentre outros instrumentos.

A pesquisa enquadra-se ainda como *pesquisa-ação*, pois constitui-se de "[...] um processo investigativo de intervenção em que caminham juntas prática investigativa, prática reflexiva e prática educativa [...]" (FIORENTINI; LORENZATO, 2007, p. 112).

Logo, ao desenvolver um estudo que procurou analisar a maneira como estudantes do ensino fundamental compreendem e aplicam o conceito de equivalência de frações, desejava-se refletir sobre o ensino e a aprendizagem do conteúdo e contribuir para sua melhoria.

Participaram da pesquisa 36 estudantes de duas turmas do 7º ano de uma escola municipal de Presidente Kennedy/ES e o professor-pesquisador, no segundo semestre do ano letivo de 2021. Os estudantes participantes tinham entre 12 e 13 anos de idade, dois deles possuindo histórico de reprovação em séries anteriores. No entanto, vale destacar que, conforme orientação das secretarias estadual e municipal de educação, devido à pandemia da COVID-19, no ano de 2020, todos os estudantes foram promovidos à série seguinte, independentemente de qualquer desempenho nas avaliações de aprendizagem realizadas, com exceção dos casos de evasão escolar.

A escola onde a pesquisa foi realizada é uma das três que ofertam turmas de anos finais do ensino fundamental no município, conhecidas como escolas polo. Nela, no ano letivo de 2021, foram ofertadas 15 turmas de 6º ao 9º ano do ensino

fundamental no turno matutino. No turno vespertino, a escola oferece turmas de educação infantil e anos iniciais do ensino fundamental. E a noite, possui turmas de etapas do ensino fundamental da Educação de Jovens e Adultos (EJA). A escolha pela escola onde se realizou a pesquisa ocorreu devido ao fato de o pesquisador nela atuar como professor regente de matemática desde o ano de 2019.

Assim, foram convidados a participar da pesquisa os estudantes matriculados nas turmas do 7º B e 7º D. A escolha pelas turmas se justifica por serem as duas turmas nas quais o professor-pesquisador atua. Almejou-se que todos os estudantes dessas turmas participassem das ações desenvolvidas, uma vez que frações equivalentes faz parte da proposta curricular deste ano da escolaridade como parte do estudo dos números racionais.

Frações equivalentes é um tema retomado no 7º ano pela segunda vez, sendo abordado formalmente a partir do 5º ano (BRASIL, 1997; BRASIL, 2017). Logo, havia a possibilidade desses estudantes possuírem conhecimentos prévios sobre o tema.

Assim, uma hipótese era que esses estudantes pudessem apresentar imagens conceituais iniciais sobre frações equivalentes, desenvolvidas anteriormente a este ano escolar em experiências vivenciadas na abordagem do assunto. No entanto, a retomada do estudo sobre equivalência de frações no 7º ano com esses estudantes teve uma motivação adicional relacionada às possíveis lacunas no processo de ensino e de aprendizagem ocasionadas pelas atividades remotas durante a pandemia da COVID-19.

Uma vez que o professor-pesquisador fez parte da pesquisa, tal motivação foi justa, pois a pesquisa se deu como investigação da prática docente e voltada para ela, tanto pelas reflexões e intervenções ao longo do seu desenvolvimento como pelos seus resultados e o produto educacional confeccionado visando contribuir com a prática sobre frações equivalentes também de outros professores.

3.1 ETAPAS DA PESQUISA

A seguir, dispõe-se o delineamento da pesquisa em etapas, promovendo uma melhor organização das informações sobre as ações realizadas para alcançar os objetivos traçados para a pesquisa. São descritas as etapas com detalhes e apresentadas cronologicamente as ações.

Inicialmente, foi obtida a autorização da escola para a realização da pesquisa através do Termo de Autorização (ANEXO A) assinado pela diretora da instituição. Após isso, os estudantes foram convidados a participar do estudo e informados sobre seus objetivos, etapas e instrumentos, recebendo o Termo de Assentimento Livre e Esclarecido (ANEXO C) assinado por eles e o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (ANEXO B) para a autorização, por parte de um responsável legal por eles, para participarem da pesquisa.

3.1.1 Primeira etapa: obtenção e identificação de imagens conceituais iniciais

A primeira etapa do delineamento da pesquisa consistiu na aplicação de uma lista de atividades²¹ (ver Tabela 5) sobre frações equivalentes especificamente selecionadas por possuírem características que favorecem o desvelar de imagens conceituais ao serem resolvidas.

Elas foram aplicadas com o propósito de identificar as imagens conceituais iniciais sobre frações equivalentes apresentadas pelos estudantes ao resolvê-las, primeiro objetivo específico da pesquisa.

A aplicação desse primeiro teste ocorreu nos dias 23/08/21 e 30/08/21 tendo em vista que cada turma foi dividida em dois grupos que se revezavam semanalmente nas aulas presenciais. Em ambos os dias, foram utilizados 50 minutos para a realização das atividades, com a participação de 22 estudantes que estiveram presentes.

As atividades foram entregues a cada estudante em uma folha. Em seguida, foi feita a leitura de cada questão com esclarecimentos adicionais sobre os enunciados como, por exemplo, possíveis termos desconhecidos e objetivos das questões. Conforme foram surgindo dúvidas, os estudantes receberam orientações e sugestões, além de serem desafiados. Alguns questionamentos feitos pelos estudantes foram validados ou não, em uma atitude informativa (MINGUTA; ZANON, 2018). Dessa forma, foi possível obter respostas que apontaram para a presença de imagens

²¹ Neste trabalho o termo *atividade* é tomado como sinônimo de *problema* que, conforme Santos-Wagner (2008), “é algo que queremos ou precisamos resolver e que nos apresenta uma dificuldade inicial” (p. 50). A autora também apresenta uma classificação de problemas, conforme o propósito de cada tipo: exercícios de fixação, problema de simples tradução, problema de tradução complexa, problema de processo, problema aplicado, problema desafio (p. 54).

conceituais iniciais sobre frações equivalentes evocadas pelos estudantes, uma análise feita no próximo capítulo.

Na Tabela 5 são apresentadas as atividades contidas no primeiro teste aplicadas aos estudantes.

Tabela 5 – Atividades do primeiro teste

Objetivo: Identificar as imagens conceituais iniciais sobre frações equivalentes apresentadas pelos estudantes na resolução de atividades sobre o conteúdo.	
1	Para você, o que são frações equivalentes?
2	O que vem a sua mente quando se fala em frações equivalentes?
3	<p>Das frações abaixo, qual é equivalente a fração representada pelas partes pintadas na figura?</p> <p>a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{2}{6}$ d) $\frac{2}{8}$</p> <p>Explique por que você escolheu essa fração.</p>
4	As frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{6}$ são equivalentes? Por quê?
5	<p>Maria Eduarda e Natália são irmãs. A mãe delas deu um pote de açaí para cada uma. Os potes eram do mesmo tamanho. Maria comeu $\frac{1}{3}$ do seu pote e Natália comeu $\frac{2}{5}$ do seu. Qual das duas comeu mais açaí? Escreva como você chegou a essa resposta.</p>
6	<p>Vinícius e sua família saíram numa viagem. No primeiro dia da viagem, percorreram $\frac{1}{3}$ do caminho e no segundo dia, mais $\frac{1}{2}$. Que fração do percurso, Vinícius e sua família percorreram nos dois primeiros dias da viagem?</p>



Fonte: Elaborado pelo autor, 2021.

Com a primeira atividade, buscou-se obter respostas que apresentassem imagens conceituais diretamente relacionadas à definição do conceito de frações equivalentes. Para isso, foi feita uma pergunta direta sobre o assunto na atividade 1 (VINNER, 1983; VINNER, 2002; ZANON, 2019).

A segunda atividade foi elaborada com o propósito de agregar informações àquelas obtidas na atividade 1. Ao refletir e relatar sobre o que vem à mente quando se fala em frações equivalentes, os estudantes poderiam se recordar de informações obtidas ao estudarem esse assunto nos anos anteriores, mobilizando assim imagens conceituais que reforçassem ou não o que responderam na atividade 1, por estarem relacionadas ao conceito de equivalência ou não.

Nas atividades 3 e 4 foram propostas tarefas em que o conceito de equivalência de frações deveria ser mobilizado para sua resolução. Esperava-se que os estudantes apresentassem, em suas respostas, imagens conceituais que se relacionassem ao conceito de equivalência de frações ou a propriedades associadas ao conceito, sem os quais não é possível resolver as questões. Tais respostas poderiam reforçar ou não as imagens obtidas nas atividades 1 e 2.

Ao selecionar as atividades 3 e 4, antecipou-se a possibilidade de os estudantes não se expressarem de forma coerente com o conceito de equivalência de frações (ou de não se expressarem) nas atividades 1 e 2. No entanto, ao resolverem as atividades 3 e/ou 4, por se recordarem de atividades similares e de procedimentos de cálculo, seria possível acessar imagens conceituais sobre frações equivalentes. Assim, as atividades 3 e 4, bem como as atividades 5 e 6, foram pensadas para proporcionar outras oportunidades de os estudantes evidenciarem imagens conceituais sobre o conceito de frações equivalentes.

Na atividade 3 foi escolhida uma tarefa envolvendo o significado de fração como parte de um todo, representada geometricamente. Atividades como essa são comuns nos livros didáticos em tópicos introdutórios ao estudo sobre frações e frações equivalentes (GIOVANNI JÚNIOR; CASTRUCCI, 2018a). Assim, acreditava-se que essa situação poderia ser familiar aos estudantes e que fossem evocadas imagens conceituais sobre frações equivalentes devido ao estudo do conteúdo em anos anteriores.

Na atividade 4, ao serem apresentados os números fracionários, foi perguntado se são frações equivalentes e foi solicitado que explicassem as respostas, esperava-se que os estudantes utilizassem estratégias para resolução da atividade e as apresentassem, por meio de esquemas, procedimentos de cálculos ou mesmo explicando verbalmente, por exemplo. Já as atividades 5 e 6 abordaram a comparação de frações e a adição de frações, respectivamente. Embora essas atividades pudessem ser resolvidas sem uso de frações equivalentes, constituíram-se de oportunidades para investigar as possíveis estratégias apresentadas pelos estudantes em suas respostas, uma vez que são situações em que não está explícita a relação com frações equivalentes (não há menção ao assunto).

Considerou-se importante incluir as atividades 5 e 6 por se tratarem de situações típicas em que frações equivalentes são uma ferramenta fundamental para sua resolução. Isso porque é necessário reduzir as frações cujos denominadores são

diferentes a frações equivalentes que tenham um mesmo denominador comum, para em seguida se realizar a comparação ou a adição (GIOVANNI JÚNIOR; CASTRUCCI, 2018a).

3.1.2 Segunda etapa: aulas sobre frações equivalentes

A segunda etapa da pesquisa ocorreu com a aplicação de aulas baseadas em discussões coletivas (MINGUTA; ZANON, 2018) sobre três sequências de atividades sobre frações equivalentes (ver Tabelas 7, 9 e 11). As atividades selecionadas e a condução do desenvolvimento das aulas foram pensadas com o intuito de proporcionar a construção ou reconstrução de imagens conceituais coerentes sobre frações equivalentes pelos estudantes. Essas atividades possuíam características específicas que favorecem o desvelar de imagens conceituais, cuja escolha e as “[...] interações entre o sujeito que compreende e o objeto de compreensão tendem a ser potentes para examinarmos imagens conceituais [...]” (ZANON, 2019, p. 293). Essas escolhas subsidiaram a confecção do produto final da pesquisa, um *guia didático com orientações e sugestões de atividades para o ensino e aprendizagem de frações equivalentes*.

Nas aulas, foi retomado o tema frações equivalentes tendo em vista sua aplicação em outros tópicos relacionados aos números racionais a serem tratados na sequência das aulas, no cumprimento do currículo previsto pela BNCC (BRASIL, 2017) para o 7º ano. Em cada aula, as questões foram abordadas individualmente. Foi feita a leitura coletiva com a turma, seguida de explicações mais detalhadas sobre o que era solicitado nas atividades e, com isso, adentrou-se em discussões sobre ideias e estratégias de resolução propostas pelos estudantes. Todas as aulas foram gravadas em áudio com o objetivo de coletar informações adicionais provenientes das discussões realizadas em torno das atividades.

3.1.2.1 Aula 1: Definição, obtenção e verificação de frações equivalentes

Tendo em vista que as turmas foram divididas em dois grupos que se revezavam semanalmente, a Aula 1 teve duração de 100 minutos e foi aplicada em dois dias: em 27/09/21 com o grupo 1 das duas turmas (7º B e 7º D) e em 04/10/21

com o grupo 2, ambos da mesma turma. Apresenta-se a organização da Aula 1 na Tabela 6.

Tabela 6 – Organização da Aula 1

Aula 1	
Tema	Frações equivalentes: definição, obtenção e identificação de frações equivalentes com quantidades contínuas e discretas.
Desenvolvimento e atividades	Aula baseada em discussões coletivas; resolução de atividades sobre o tema da aula.
Objetivos	Compreender que duas ou mais frações são equivalentes quando representam a mesma porção da unidade; reconhecer frações equivalentes como formas distintas de representar uma mesma quantidade; identificar frações equivalentes; obter frações equivalentes a uma fração dada.
Tempo	100 minutos.
Datas	Grupo 1: 27/09/21; Grupo 2: 4/10/21.

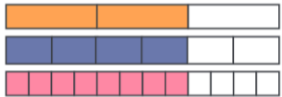
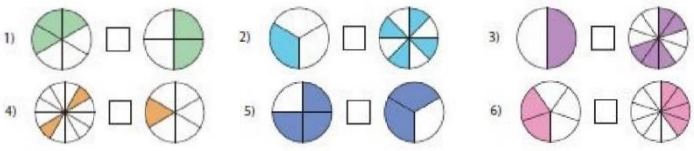
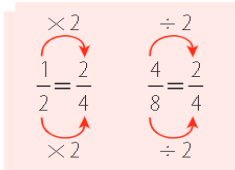
Fonte: Elaborado pelo autor, 2021.

As atividades 1 e 2 desenvolvidas na Aula 1, apresentaram uma noção de frações equivalentes associada a comparação de áreas (quantidade contínua) pintadas em figuras geométricas. Trata-se da abordagem de frações como parte de um todo em um modelo geométrico tradicional com figuras comuns e não comuns (JAHN; CAMPOS; SILVA; SILVA, 1999; MERLINI, 2005). O objetivo foi levar os estudantes a compreender que frações que representam a mesma porção de área pintada em cada figura são frações equivalentes.

As atividades 3 a 5 trataram da aplicação da seguinte propriedade usada para obtenção de frações equivalentes e verificação da equivalência entre frações dadas: “Quando multiplicamos ou dividimos o numerador e o denominador de uma fração por um mesmo número, diferente de zero, obtemos sempre uma fração equivalente à fração dada” (GIOVANNI JÚNIOR; CASTRUCCI, 2018a, p. 143).

A atividade 5, em especial, tratou da transformação de frações cujos denominadores são diferentes em frações equivalentes que tenham denominadores comuns, procedimento importante para resolução de problemas de comparação, ordenação, adição e subtração de frações (BERTONI, 2009; GIOVANNI JÚNIOR; CASTRUCCI, 2018a, 2018b). Apresenta-se na Tabela 7 as atividades desenvolvidas na Aula 1.

Tabela 7 – Atividades da Aula 1

Número	Atividade
1	<p>Observe as barras a seguir.</p>  <p>a) Escreva a fração que representa as partes coloridas de cada barra. b) Podemos afirmar que essas frações são equivalentes? Explique por quê.</p>
2	<p>Escreva = entre os círculos abaixo quando as partes coloridas representarem frações equivalentes e \neq quando não forem equivalentes. Explique suas respostas.</p> 
3	<p>Para encontrar uma fração equivalente a outra, podemos multiplicar ou dividir o numerador e o denominador da fração por um mesmo número que seja diferente de zero.</p>  <p>Utilizando esse raciocínio, qual é a fração equivalente a:</p> <p>a) $\frac{3}{4}$ com denominador 28? c) $\frac{3}{15}$ com numerador 1? b) $\frac{6}{9}$ com denominador 3? d) $\frac{4}{5}$ com numerador 12?</p>
4	<p>Verifique se os pares de frações abaixo são equivalentes ou não, considerando que representam partes de um mesmo inteiro. Mostre como chegou em suas respostas.</p> <p>a) $\frac{2}{7}$ e $\frac{6}{21}$ c) $\frac{3}{10}$ e $\frac{21}{70}$ e) $\frac{16}{10}$ e $\frac{8}{5}$</p>
5	<p>Utilizando frações equivalentes, reduza as frações a seguir ao mesmo denominador. Apresente os cálculos e procedimentos utilizados.</p> <p>a) $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$ b) $\frac{4}{6}$ e $\frac{3}{4}$ c) $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{4}$</p>

Fonte: Elaborado pelo autor, 2021.

A aula foi iniciada em cada grupo entregando as atividades em uma folha aos estudantes e apresentando os objetivos da Aula 1 em seguida. Explicou-se para os estudantes que tanto a Aula 1 como as seguintes abordariam frações equivalentes, tema tratado no primeiro teste aplicado na primeira fase da pesquisa e que era fonte de inquietação de alguns dos estudantes que demonstravam interesse em saber sobre seu desempenho e sobre o tema.

Ao longo das atividades e diante de algumas respostas equivocadas, foram feitas observações sobre escrita e leitura de frações, enfatizando o significado do numerador e denominador em uma fração cuja ideia esteja associada a partes de um todo.

Comentou-se também sobre erros comuns relacionados à escrita de frações como, por exemplo, representar no numerador a quantidade de partes tomadas em uma figura e no denominador as partes não tomadas, a relação parte-parte (MERLINI, 2005).

3.1.2.2 Aula 2: Comparação e ordenação de frações

A Aula 2 foi realizada no dia 29/09/21 com o grupo 1 e no dia 6/10/21 com o grupo 2 de ambas as turmas. Com as atividades dessa aula, foram abordadas ideias relacionadas à comparação e ordenação de frações. Especialmente nos casos em que as frações possuem denominadores diferentes, foi discutida a importância da equivalência de frações como alternativa na resolução de problemas. Apresenta-se na Tabela 8 a organização proposta para a Aula 2.

Tabela 8 – Organização da Aula 2

Aula 2	
Tema	Comparação e ordenação de números racionais na forma fracionária.
Desenvolvimento e atividades	Aula baseada em discussões coletivas; resolução de atividades sobre o tema da aula.
Objetivos	Comparar e ordenar números racionais representados na forma fracionária em diferentes contextos.
Tempo	50 minutos.
Data	Grupo 1: 29/09/21; Grupo 2: 6/10/21.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2021.

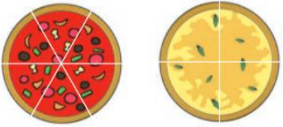
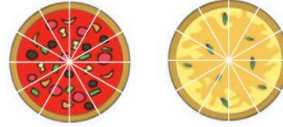
Na Aula 2 foram trazidos problemas cotidianos relacionados à comparação e ordenação de frações. As situações descritas nos problemas são apresentadas de modo a promover uma investigação que forneça pistas aos estudantes sobre a utilidade das frações equivalentes na resolução dos problemas. Além disso, essa característica das questões favorecem a obtenção e análise de imagens conceituais ao estimular o estudante a fazer descrições e explicações sobre suas conclusões.

A atividade 1 abordou a comparação de frações cujos denominadores são iguais. A escolha desse problema teve como objetivo levar os estudantes a perceberem como se dá a comparação de frações em situações desse tipo (denominadores iguais) e envolveu uma quantidade discreta (arremessos), em que as frações foram tomadas em seu significado parte-todo.

Na atividade 2 discutiu-se um problema de comparação de frações cujos denominadores são diferentes. Nesse caso, a ideia foi levar o estudante a perceber as dificuldades de se realizar a comparação com frações desse tipo, devendo recorrer às frações equivalentes como uma possível maneira de resolver o problema com exatidão, diferentemente das estratégias baseadas na comparação visual de áreas de figuras. Por fim, as atividades 3 e 4 trataram da comparação e ordenação, respectivamente, das frações dadas. Na Tabela 9, apresentam-se as atividades desenvolvidas na Aula 2.

Tabela 9 – Atividades da Aula 2

Número	Atividade
1	<p>Em um treino de basquete, Marta, Jacqueline, Paula e Hortência jogaram a bola na cesta 12 vezes cada uma. Marta acertou 10 vezes; Jacqueline, 7 vezes; Paula, 8 vezes; e Hortência acertou todos os seus arremessos.</p> <p>a) Quem acertou mais cestas? b) Quem acertou menos cestas? c) Escreva a fração que representa a quantidade de cestas certas, em relação aos 12 arremessos realizados por cada jogadora. d) Utilizando os símbolos de igual a (=), maior que (>) ou menor (<), escreva essas frações em ordem decrescente. e) Observe as frações que você escreveu e responda: os denominadores são iguais ou diferentes? f) A qual conclusão podemos chegar ao comparar frações com o mesmo denominador?</p>

2	<p>Manuela assou duas pizzas do mesmo tamanho para sua família, uma de calabresa e outra de muçarela. A pizza de calabresa foi dividida em 6 fatias iguais, e Manuela comeu duas fatias. A pizza de muçarela foi dividida em 4 partes iguais, e Manuela comeu uma delas. Com base nessas informações, responda às perguntas a seguir.</p>  <p>a) Que fração da pizza de calabresa Manuela comeu? b) Que fração da pizza de muçarela Manuela comeu? c) Qual das pizzas foi cortada em pedaços maiores? d) Como podemos saber se Manuela comeu mais pizza de calabresa ou mais pizza de muçarela? e) Se as pizzas tivessem sido divididas em 12 pedaços, qual seria a fração equivalente aos pedaços de pizza de calabresa que Manuela comeu? E a fração equivalente ao pedaço de pizza de muçarela que ela comeu? f) Compare as frações que você escreveu no item anterior. Qual é maior? g) Agora, compare as frações que você escreveu nos itens a e b. Qual é a maior?</p> 
3	<p>Compare as frações abaixo, utilizando os símbolos de igual (=), maior que (>) ou menor que (<).</p> <p>a) $\frac{4}{7}$ e $\frac{2}{7}$ b) $\frac{3}{5}$ e $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{6}$</p>
4	<p>Compare as frações abaixo e escreva-as em ordem crescente.</p> <div style="background-color: #f0f0f0; padding: 5px; display: inline-block;"> $\frac{3}{5}$ $\frac{1}{10}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{9}{10}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{10}{10}$ $\frac{2}{10}$ $\frac{4}{10}$ $\frac{3}{10}$ $\frac{7}{10}$ </div>

Fonte: Elaborado pelo autor, 2021.

3.1.2.3 Aula 3: Adição e subtração de frações

A Aula 3 foi realizada no dia 01/10/21 com o grupo 1 e no dia 08/10/21 com o grupo 2 de ambas as turmas. Na Tabela 10, apresenta-se a organização proposta para a Aula 3.

Tabela 10 – Organização da Aula 3

Aula 3	
Tema	Adição e subtração de números racionais na forma fracionária.
Desenvolvimento e atividades	Aula baseada em discussões coletivas; resolução de atividades sobre o tema da aula.
Objetivos	Resolver problemas que envolvam adição e/ou subtração de números racionais representados na forma fracionária.

Tempo	50 minutos.
Data	Grupo 1: 1/10/21; Grupo 2: 8/10/21.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2021.

As atividades da Aula 3 trataram da adição e subtração de frações por meio de problemas contextualizados que retrataram situações cotidianas. Nas atividades 1 e 2 apresentam-se tarefas envolvendo frações com denominadores iguais, relacionadas a grandezas contínuas, quantidade de bolo e área de uma parede, respectivamente.

Essas atividades foram selecionadas para que, por meio delas, os estudantes percebessem as características da adição e subtração de frações quando seus denominadores são iguais.

Nas atividades 3, 4 e 5 as frações envolvidas possuíam denominadores diferentes. As grandezas nesse caso são contínuas (quantidade de cartolina, na atividade 3) e discretas (quantidade de dinheiro e número de estudantes, nas atividades 4 e 5, respectivamente).

Tendo em vista as frações com denominadores diferentes nessas atividades, almejava-se que os estudantes percebessem a necessidade de os denominadores serem iguais para se realizar adições e subtrações (conforme verificado nas atividades 1 e 2), relacionando essa necessidade ao uso de frações equivalentes como uma possível estratégia de resolução. Apresentam-se na Tabela 11 as atividades desenvolvidas na Aula 3.

Tabela 11 – Atividades da Aula 3

Número	Atividade
1	Júlia fez um bolo de chocolate para suas filhas, Karina e Natália. Karina comeu $\frac{2}{5}$ do bolo. Já Natália, comeu $\frac{1}{5}$. Que fração representa a quantidade de bolo Karina e Natália comeram juntas? Que fração do bolo sobrou?
2	No primeiro dia de trabalho, Kauan pintou $\frac{1}{8}$ de uma parede e, no segundo dia, pintou $\frac{3}{8}$ da mesma parede. Que fração da parede ele pintou nos dois dias? Que fração da parede ainda falta ser pintada?
3	Para fazer um trabalho escolar, Gustavo usou $\frac{1}{2}$ de uma folha de cartolina, enquanto sua irmã usou $\frac{1}{4}$ da mesma folha para fazer o trabalho dela. Que fração dessa folha os dois usaram juntos? Que fração da folha restou?

4	<p>Guilherme gastou $\frac{2}{4}$ do dinheiro que sua mãe lhe deu para comprar um sanduíche e $\frac{1}{3}$ para comprar um sorvete. Em relação ao dinheiro que ganhou, que fração representa a quantidade que Guilherme gastou? Que fração da quantidade de dinheiro ainda sobrou para Guilherme?</p>
5	<p>Uma pesquisa sobre jogos eletrônicos feita com alunos do 7º ano da escola de Jaqueira mostrou que:</p> <ul style="list-style-type: none"> • $\frac{1}{4}$ dos alunos preferem jogar <i>Garena Free Fire</i>. • $\frac{2}{3}$ dos alunos preferem jogar <i>PUBG</i>. • O restante dos alunos não gosta de jogos eletrônicos. <p>Que fração representa a quantidade de alunos que gostam de jogos eletrônicos? E qual fração representa a quantidade de alunos que não gostam de jogos eletrônicos?</p>

Fonte: Elaborado pelo autor, 2021.

3.1.3 Terceira etapa: verificação da movimentação de imagens conceituais

A terceira etapa da pesquisa consistiu na aplicação de um segundo teste, similar ao aplicado na primeira etapa da pesquisa quando buscou-se identificar as imagens conceituais iniciais sobre frações equivalentes apresentadas pelos estudantes na resolução de atividades sobre o conteúdo. Essa nova lista de atividades serviu como instrumento de avaliação sobre o conteúdo, compondo o terceiro trimestre de 2021.

Através desse segundo teste, foi analisado o movimento de construção/reconstrução das imagens conceituais dos estudantes sobre frações equivalentes, comparando as imagens evocadas nessas atividades com aquelas inicialmente apresentadas na primeira etapa, tendo em vista o segundo objetivo específico traçado para a pesquisa: *verificar como as imagens conceituais iniciais apresentadas pelos estudantes se modificam ou não durante a realização das atividades sobre frações equivalentes*.

O segundo teste foi aplicado no dia 11/10/21 no grupo 1 e no dia 18/10/21 no grupo 2 de cada turma sendo que 36 estudantes participaram. No entanto, somente 13 desses estudantes participaram das atividades da primeira etapa (Teste 1) e da segunda etapa da pesquisa (Aula 1, Aula 2 e Aula 3). Por conta disso, apresenta-se no próximo capítulo a análise do movimento de imagens conceituais ocorrida com esses estudantes.

As atividades foram entregues a cada estudante em uma folha e foi disponibilizado um tempo de 50 minutos para sua realização. Foi feita a leitura de cada questão e, ao longo da aula, orientando e auxiliando os estudantes quanto a dúvidas que iam surgindo. Normalmente, essas eram expostas para a turma inteira, como oportunidade para sanar possíveis dúvidas iguais de outros estudantes.

A seleção dessas atividades também levou em conta o seu potencial em desvelar imagens conceituais sobre equivalência de frações em situações em que o conceito é requerido diretamente e quando aparece relacionado à comparação, ordenação, adição e subtração de frações com denominadores diferentes. Apresentam-se na Tabela 12 as atividades propostas no segundo teste.

Tabela 12 – Atividades do segundo teste

Objetivo: Verificar como as imagens conceituais iniciais apresentadas pelos estudantes se modificam ou não durante a realização das atividades sobre frações equivalentes.	
1	O que são frações equivalentes?
2	<p>Das frações abaixo, qual é equivalente a fração representada pelas partes pintadas na figura?</p> <p>a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{2}{6}$ d) $\frac{2}{8}$</p> <p>Explique por que você escolheu essa fração.</p>
3	<p>Numa cidade, $\frac{3}{7}$ da população torce pelo Flamengo e $\frac{2}{5}$ torce pelo Botafogo. Que time tem mais torcedores?</p>
4	<p>Guilherme toma $\frac{1}{4}$ de uma jarra de suco de laranja de manhã, $\frac{1}{3}$ da mesma jarra durante o almoço e o restante a noite. Que fração da jarra de suco ele consome durante o dia? E a noite?</p>



Fonte: Elaborado pelo autor, 2021.

Na atividade 1 foi perguntado de forma direta o que são frações equivalentes. Esperava-se que os estudantes mobilizassem imagens conceituais da definição do conceito de equivalência de frações para respondê-la.

A atividade 2, também presente no primeiro teste, é uma tarefa que solicitava do estudante que observasse a figura, representasse uma fração associada à área que foi pintada e em seguida verificasse qual das frações presentes nas opções seria equivalente a primeira. Ao serem solicitados a explicarem sua resposta, almejava-se observar o raciocínio empregado, podendo ser semelhante ao mencionado anteriormente ou algum outro, e assim, observar as possíveis imagens conceituais evocadas.

As atividades 3 e 4 são problemas que trataram, respectivamente, de comparação e ordenação de frações, e adição e subtração de frações. Na atividade 3 trata-se de uma grandeza discreta (número de torcedores) e na atividade 4 uma grandeza contínua (volume de suco). Em ambas as situações, as frações envolvidas possuem denominadores diferentes, de modo que transformá-las em frações equivalentes com denominadores iguais era a estratégia que se esperava que o estudante utilizasse, antes de realizar a comparação das frações na atividade 3 e de adicionar as da atividade 4.

4 DISCUSSÕES E RESULTADOS

Neste capítulo são analisadas as imagens conceituais sobre o conceito de frações equivalentes apresentadas pelos estudantes participantes da pesquisa durante a realização de atividades sobre esse tópico matemático. Inicialmente, são abordadas as imagens conceituais iniciais evocadas na primeira fase da pesquisa por meio do primeiro teste. E, em seguida, é analisado o desempenho dos estudantes no último bloco de atividades, comparando as imagens conceituais apresentadas nessa etapa com aquelas obtidas no primeiro teste e ao longo das aulas, numa discussão sobre as modificações ocorridas.

4.1. IMAGENS CONCEITUAIS INICIAIS

Neste tópico, são apresentados e discutidos os resultados obtidos no primeiro teste, que foram atividades desenvolvidas e aplicadas na primeira etapa da pesquisa elaboradas com o objetivo específico (objetivo 1) de *identificar as imagens conceituais iniciais sobre frações equivalentes apresentadas pelos estudantes na resolução de atividades sobre o conteúdo*.

Com base nas questões propostas nesse primeiro teste, no objetivo de cada uma delas e nas respostas fornecidas pelos estudantes, elenca-se com base em Zanon (2019), as seguintes *categorias de análise* utilizadas para examinar os dados obtidos:

- *Imagem da definição do conceito de frações equivalentes*: imagens conceituais que se enquadram nesta categoria estão relacionadas à definição formal de frações equivalentes. Dessa forma, esperava-se encontrar respostas semelhantes ou diretamente associadas à definição dada por Giovanni Júnior e Castrucci (2018a, p. 142): “duas ou mais frações que representam a mesma porção da unidade são chamadas de frações equivalentes”. Tomou-se a definição apresentada como referência tendo em vista ter sido também usada como referência para a confecção das APNPs utilizadas pelo professor e estudantes nas aulas remotas ao longo do ano de 2020.

- *Imagem do ensino e da aprendizagem sobre frações equivalentes:* nesta categoria estão as imagens conceituais que não estão diretamente relacionadas ao conceito de equivalência de frações, mas que evidenciam características sobre ele, como procedimentos e esquemas úteis para resolução de tarefas e exemplos que retratam como os estudantes compreendem as frações equivalentes. Imagens conceituais nesta categoria indicam o modo como ocorreram o ensino e aprendizagem sobre frações equivalentes nos anos anteriores, interferindo na construção de imagens conceituais coerentes e/ou incoerentes relacionadas a esse conceito matemático (ZANON, 2019). O conhecimento acerca desse tipo de imagem conceitual pode auxiliar professores tanto pela compreensão sobre a aprendizagem dos alunos quanto por sugerir melhorias ao ensino que formou possíveis imagens erradas (VINNER, 1983).

4.1.1 Análise das imagens conceituais iniciais obtidas

Apresentam-se a seguir os resultados obtidos quando os estudantes realizaram o primeiro teste²². Esse primeiro teste era composto de seis tarefas sobre frações equivalentes, conforme apresentado na Tabela 5. São discutidas as respostas apresentadas pelos estudantes segundo as categorias de análise definidas anteriormente. Os estudantes são identificados por meio de nomes fictícios com o intuito de preservar a identidade de cada um.

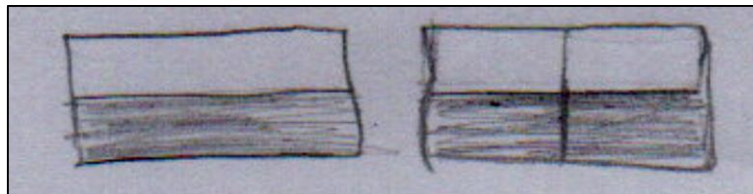
4.1.1.1 Imagem conceitual da definição do conceito

Foram encontradas em algumas respostas apresentadas nas atividades 1 e 2 elementos que apontam para possíveis imagens conceituais da definição do conceito de frações equivalentes. Os estudantes Adamastor, Nyck, Carlos e Ingrid forneceram respostas que se aproximaram da definição formal e/ou trouxeram referências diretas a ela.

²² Em algumas análises, foram acrescentadas interpretações baseadas em respostas dos estudantes obtidas ao longo das aulas sobre frações equivalentes na segunda etapa da pesquisa.

Adamastor respondeu na atividade 1 que frações equivalentes são “*frações que representam a mesma porção de espaço*” e na atividade 2 apresentou os desenhos mostrados na Figura 2 que ilustraram o que se recordava sobre esse assunto.

Figura 2 – Resposta de Adamastor na atividade 2 do primeiro teste



Fonte: Acervo do autor, 2021.

Nota-se que a resposta apresentada por Adamastor na atividade 1, especialmente o trecho sublinhado, possui grande proximidade com a definição formal de frações equivalentes proposta por Giovanni Júnior e Castrucci (2018a), parecendo com isso ter evocado uma imagem conceitual sobre a definição. O uso da expressão “espaço” por parte do estudante sugere ainda uma influência proveniente de um modelo de ensino com ênfase ao significado de fração como parte de um todo²³, baseado em representações com figuras geométricas (MERLINI, 2005; SILVA, 2011; CHEQUETTO, 2016). Nesse caso, ao invés de *espaço* a grandeza envolvida seria *área*.

Essa interpretação é reforçada pela resposta dada por Adamastor na atividade 2, apresentada na Figura 2. Os desenhos feitos pelo estudante ilustraram sua noção sobre frações equivalentes e apontaram para uma possível imagem conceitual da definição do conceito de equivalência por estar diretamente relacionada a ele. Adamastor representou geometricamente duas frações que são equivalentes, tendo em vista que a porção pintada (a área) é igual em ambos os retângulos. Ou seja, de forma coerente, Adamastor formulou uma definição muito próxima da formal e a exemplificou aplicando a figuras geométricas. Além disso, a opção por um esquema em forma de desenho, conforme apresentado, sugere novamente a influência do significado parte-todo no processo de ensino e aprendizagem sobre frações.

Ao responder as atividades 3 e 4, Adamastor novamente pareceu evocar imagens conceituais da definição de frações equivalentes. Na atividade 3 ele escolheu

²³ Embora esse trecho apresente uma interpretação sobre imagens conceituais do ensino e da aprendizagem, para melhor organização, devido a proximidade com a resposta do estudante, foi inserido nesta seção.

o item *b* e justificou sua escolha da seguinte forma: “*Imaginei cada fração ao lado da outra e percebi que uma ocupava a mesma porção de espaço*”. Assim, o estudante argumentou de forma coerente, utilizando a definição por ele apresentada na atividade 1 para resolver a tarefa.

Já na atividade 4, ao comparar as frações dadas, o estudante concluiu que são frações equivalentes e justificou dizendo que “*as duas ocupam a mesma porção de espaço*”. O estudante mobilizou a definição de frações equivalentes por ele apresentada na atividade 1 para resolver corretamente também essa tarefa. Os trechos destacados nas respostas sugerem a presença de imagens conceituais da definição. Adamastor ainda apresentou um desenho na atividade 4 como parte da justificativa de sua resposta, como mostrado na Figura 3.

Figura 3 – Resposta de Adamastor na atividade 4 do primeiro teste



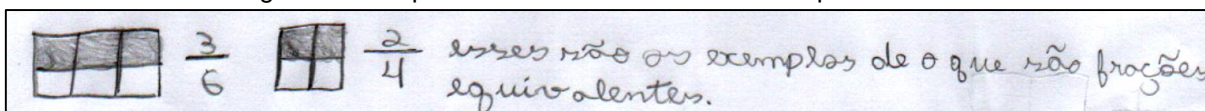
Fonte: Acervo do autor, 2021.

Nos desenhos, Adamastor representou as frações $1/2$ e $3/6$ como porções de círculos e concluiu pela observação, que as porções sombreadas em ambos os círculos possuem áreas iguais, tratando-se então de frações equivalentes.

A estudante Nyck respondeu na atividade 1 que frações equivalentes são “*frações diferentes, mas que representam o mesmo valor*”. O trecho sublinhado sugere que a estudante evocou imagens conceituais da definição do conceito, se referindo a frações equivalentes como aquelas às quais se pode associar um único número, embora escritas de maneiras diferentes. Essa interpretação está de acordo com Bertoni (2009). Para essa autora, se duas ou mais frações são equivalentes, todas representam uma mesma quantidade em relação a uma mesma unidade e a todas deve ser associado um mesmo número.

Já o estudante Carlos apresentou na atividade 1 um desenho parecido com o apresentado por Adamastor (Figura 2) e que remete à definição de frações equivalentes, como mostrado na Figura 4.

Figura 4 – Resposta de Carlos na atividade 1 do primeiro teste



Fonte: Acervo do autor, 2021.

Algo importante de ser registrado está presente na resposta de Carlos. Pode-se identificar um equívoco em seu desenho, relacionado ao tamanho dos retângulos. Por não serem iguais, as áreas sombreadas em cada retângulo também não serão iguais, o que faz com que as frações representadas não sejam equivalentes.

Embora a resposta do estudante possa sugerir a presença de imagens conceituais da definição, essas imagens pareceram ser fragmentadas pois ignorou em sua resposta que frações equivalentes dizem respeito à um mesmo inteiro. Dessa forma, as frações $3/6$ e $2/4$ só serão equivalentes se forem consideradas que sejam frações, por exemplo, de retângulos congruentes.

A aluna Ingrid respondeu na atividade 1 que frações equivalentes são “*frações que em um pode haver vários resultados*”. O fragmento destacado sugere que a estudante evocou uma imagem conceitual da definição, relacionada às várias representações das frações que são equivalentes entre si (BERTONI, 2009).

Em síntese, as respostas apresentadas por esses estudantes demonstraram que, pelo menos para eles, imagens conceituais da definição do conceito de frações equivalentes não são vazias, podendo ser oriundas de um processo mecânico de memorização ou significativo quanto à aprendizagem, relacionadas em maior ou menor grau ao conceito como um todo (TALL; VINNER, 1981). Essa possibilidade foi considerada como hipótese, tendo em vista a abordagem desse assunto em anos anteriores (MINGUTA; ZANON, 2018; BRASIL, 1997, 2017). No entanto, memorizar uma definição não significa que o indivíduo tenha compreendido um conceito (VINNER, 2002; ZANON, 2019).

Assim, as definições pessoais do conceito feitas pelos estudantes ao serem estimulados a se expressarem sobre o conceito solicitado, traduziram em forma de palavras explicações próprias (TALL; VINNER, 1981), baseadas em percepções e memórias particulares que apresentaram ou omitiram aspectos da definição formal aceita pela comunidade matemática em geral, o que do contrário seria “[...] uma reprodução fiel da estrutura matemática formal e não da aprendizagem de cada sujeito singular [...]” (ZANON, 2019, p. 186).

4.1.1.2 Imagem conceitual do ensino e aprendizagem

A seguir, são analisadas as respostas que sugeriram a presença de imagens conceituais relacionadas ao processo de ensino e de aprendizagem anterior ao 7º ano. Parte dessas imagens são coerentes com noções sobre frações equivalentes, estando de alguma forma relacionadas a elas, enquanto outras são incoerentes, embora indiquem algumas ideias sobre frações.

A estudante Paola apresentou como resposta na atividade 1 o esquema mostrado na Figura 5.

Figura 5 – Resposta de Paola na atividade 1 do primeiro teste

Fonte: Acervo do autor, 2021.

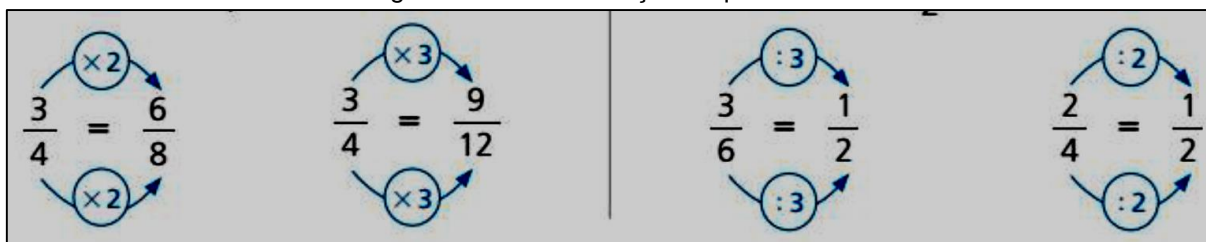
De forma semelhante, a estudante apresentou como resposta na atividade 2 o esquema mostrado na Figura 6.

Figura 6 – Resposta de Paola na atividade 2 do primeiro teste

Fonte: Acervo do autor, 2021.

Esses esquemas representam uma importante propriedade das frações equivalentes: “Quando multiplicamos ou dividimos o numerador e o denominador de uma fração por um mesmo número, diferente de zero, obtemos sempre uma fração equivalente à fração dada” (GIOVANNI JÚNIOR; CASTRUCCI, 2018a, p. 143). Tal propriedade pode ser representada esquematicamente da seguinte maneira:

Figura 7 – Obtendo frações equivalentes



Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2018a, p. 143).

É possível perceber as semelhanças entre as representações dessa propriedade nas Figuras 5, 6 e 7. Dessa forma, ao se recordar e mencionar essa propriedade em sua resposta, parece que Paola evocou imagens conceituais relacionadas ao ensino e a aprendizagem sobre frações equivalentes proveniente de anos escolares anteriores. Tratam-se de imagens conceituais sobre uma noção restrita acerca do conceito, baseada na propriedade mencionada, enquanto a definição do conceito pareceu permanecer inativa na estrutura cognitiva da estudante (TALL; VINNER, 1981).

Embora não tenha mobilizado nenhuma imagem conceitual da definição do conceito de frações equivalentes, a estudante fez menção a essa importante propriedade que auxilia na obtenção de frações equivalentes e a verificar a equivalência entre frações (BERTONI, 2009). Além disso, na resposta na atividade 2, mostrada na Figura 6, a estudante usou como exemplo a equivalência entre duas frações da classe de equivalência da fração $2/3$ enquanto na resposta na atividade 1 (Figura 5) utilizou frações da classe da fração $1/2$, o que sugere alguma familiaridade com o assunto.

Paola, embora não tenha utilizado essa propriedade na atividade 3, faz menção a ela para resolver corretamente a atividade 4, verificando a equivalência entre as frações $1/2$ e $3/6$. O esquema apresentado pela estudante é mostrado na Figura 8.

Figura 8 – Resposta de Paola na atividade 4 do primeiro teste

Fonte: Acervo do autor, 2021.

Foram encontradas nas respostas de vários outros estudantes referências à essa propriedade e, conseqüentemente, indícios da presença de imagens conceituais relacionadas ao ensino e à aprendizagem (ZANON, 2019).

Nyck, em sua resposta na atividade 2, criou um exemplo no qual se referiu à propriedade das frações equivalentes e expressou o que se recordava sobre esse tema, conforme esquema mostrado na Figura 9.

Figura 9 – Resposta de Nyck na atividade 2 do primeiro teste

Frações que multiplicada por um número da a outra
 Ex: $\frac{1}{2} \times 3 = \frac{3}{6}$

Fonte: Acervo do autor, 2021.

No exemplo criado por Nyck nota-se o uso do número 3 como fator para gerar a fração equivalente, um indício de familiaridade com o assunto tendo em vista, com base na prática docente, que normalmente os estudantes se recordam com mais frequência do fator 2, como nos exemplos de Paola nas Figuras 5 e 6.

De forma coerente, Nyck utilizou a propriedade das frações equivalentes para responder as atividades 3 e 4. Na atividade 3 ela escolheu o item *b* e justificou sua escolha da seguinte maneira: “Porque se você as multiplicar por um número, o resultado vai ser 6/8”. No trecho destacado, é possível perceber a referência a propriedade usada para obtenção de frações equivalentes, sendo que a fração 6/8 é a fração que representa a porção pintada da figura mostrada na atividade. Nyck ainda apresentou o esquema em que aplica a propriedade para chegar em sua resposta, como mostrado na Figura 10.

Figura 10 – Resposta de Nyck na atividade 3 do primeiro teste

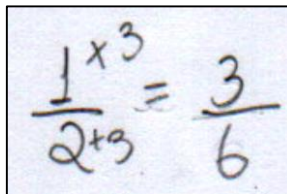
~~$\frac{3}{4}$~~ $\times 2 = \frac{6}{8}$

Fonte: Acervo do autor, 2021.

Na atividade 4, a estudante novamente fez uso da propriedade das frações equivalentes para verificar a equivalência entre as frações dadas. Em sua resposta,

ela disse: “*Sim, pois se multiplicar 1/2 por 3 o resultado vai ser 3/6*”. Embora o trecho destacado não traduza com exatidão matemática o procedimento utilizado, não há dúvida de que se trata da propriedade usada para obtenção de frações equivalentes. Para reforçar essa interpretação, observou-se o esquema mostrado na Figura 11, apresentado pela estudante como parte da justificativa de sua resposta.

Figura 11 – Resposta de Nyck na atividade 4 do primeiro teste



$$\frac{1 \times 3}{2 \times 3} = \frac{3}{6}$$

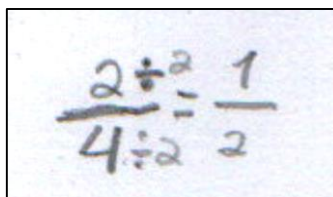
Fonte: Acervo do autor, 2021.

Na imagem pode-se ver que Nyck multiplicou ambos os termos da fração $1/2$ por 3 obtendo a fração equivalente $3/6$, resolvendo corretamente a atividade. As respostas de Nyck e a coerência entre elas sugerem que a estudante evocou imagens conceituais sobre frações equivalentes associadas ao ensino e à aprendizagem em anos anteriores.

O estudante Victor respondeu na atividade 1: “*Pra mim frações equivalentes é quando você divide uma fração por dois e se for ímpar divide por três e o resultado é equivalente a fração que você dividiu*”. Aparentemente o estudante fez menção à propriedade das frações equivalentes sendo aplicada na simplificação de frações, processo ilustrado na Figura 7 e que consiste em “dividir o numerador e o denominador da fração dada por um mesmo número maior que 1” (GIOVANNI JÚNIOR; CASTRUCCI, 2018a, p. 143). A fração obtida nesse processo é equivalente a fração dada e com numerador e denominador formados por números menores.

Ao responder a atividade 2, Victor confirmou aquilo que procurou expressar na atividade 1, apresentando a resposta mostrada na Figura 12.

Figura 12 – Resposta de Victor na atividade 2 do primeiro teste



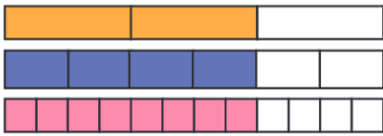
$$\frac{2 \div 2}{4 \div 2} = \frac{1}{2}$$

Fonte: Acervo do autor, 2021.

Pode-se ver nesse esquema exemplos de frações equivalentes, sendo a segunda obtida por meio da simplificação da primeira. A seguir, é apresentado um trecho da Aula 1, chamado de *Segmento 1*, que mostra uma discussão coletiva que visava expor o pensamento matemático dos estudantes. Abordava-se a atividade 1 (Figura 13) na aula realizada com o grupo 1 do 7º D. No segmento, destaca-se a participação dos estudantes Victor e Helena.

Figura 13 – Atividade 1 da Aula 1

1. Observe as barras a seguir.



a) Escreva a fração que representa as partes coloridas de cada barra.

b) Podemos afirmar que essas frações são equivalentes? Explique por quê.

Fonte: Adaptado de Almeida (2019).

Segmento 1 – Discussão sobre a atividade 1 da Aula 1 com o grupo 1 do 7º D. Após serem convidados a participar da resolução da atividade, os estudantes mencionaram quais seriam as frações que representam as partes coloridas em cada barra, no item a ($2/3$, $4/6$ e $8/12$). Em seguida, foi feita a leitura do item b.

Professor-pesquisador: *Podemos afirmar que essas frações são equivalentes? Sim ou não e explique por quê. Primeiro, com base nos desenhos das barras, o que vocês imaginam que seriam frações equivalentes?*

Victor: *Eu posso falar?*

Professor-pesquisador: *Tenta falar pra mim.*

Victor: *É quando você divide ela por dois. Aí se não der por dois, você divide por três. Aí a resposta é equivalente ao que você pediu, ao anterior.*

Professor-pesquisador: *Tem a ver. Vai passar por isso que você falou quando a gente falar de simplificação de frações. Então tem a ver, mas o conceito ainda não seria esse. A questão é: quando duas ou mais frações são equivalentes?*

Helena: *Eu acho que são equivalentes porque ela tá multiplicando por dois, tipo... dois vezes dois, quatro. Quatro vezes dois, oito. Três vezes dois, seis. Seis vezes dois, doze.*

Nesse fragmento, pode-se ver que Victor ignorou o contexto da atividade e praticamente repete a resposta dada por ele na atividade 1 do primeiro teste. Isso sugere que o estudante evocou imagens conceituais iniciais que relacionam

fortemente a definição do conceito de frações equivalentes com o processo de simplificação de frações.

Victor também utilizou essa ideia na atividade 4, na qual concluiu que as frações dadas são equivalentes e justificou sua resposta com o esquema apresentado na Figura 14.

Figura 14 – Resposta de Victor na atividade 4 do primeiro teste

sim.
porque $\frac{3 \div 3}{6 \div 3} = \frac{1}{2}$

Fonte: Acervo do autor, 2021.

A estratégia utilizada por Victor nessa atividade é diferente da usada pelos outros estudantes. Embora também utilize a propriedade das frações equivalentes para verificar a equivalência entre frações $1/2$ e $3/6$, ele tomou a segunda fração e a simplificou obtendo a primeira. Dessa forma, ele foi coerente com as suas respostas nas atividades anteriores, nas quais se referiu à simplificação de frações.

A estudante Jade, que não apresentou resposta na atividade 1, formulou a seguinte resposta na atividade 2: “*Que fração equivalente é parecida com frações redutível e irredutível*”. A estudante, embora não tenha apresentado exemplos, parece se recordar e evocar imagens conceituais relacionadas à simplificação de frações pois, ao simplificar uma fração até que se obtenha os menores termos possíveis, a fração obtida é chamada de forma simplificada ou forma irredutível (GIOVANNI JÚNIOR; CASTRUCCI, 2018a, p. 143).

As estudantes Zoe, Maria e Helena também pareceram se referir à propriedade das frações equivalentes em suas respostas nas atividades 1 e 2. Zoe respondeu na atividade 1 que “*Frações equivalentes são aquelas que podem ser multiplicadas ou divididas por o número da fração*”. E na atividade 2, de modo muito semelhante à resposta anterior, apresentou a seguinte resposta: “*Números que podem ser multiplicados ou divididos pelo número da fração*”. Maria respondeu a atividade 2 com “*divisão e multiplicação*”. Já Helena, respondeu na atividade 1 que “*Frações equivalentes são as frações que dão para multiplicar e dividir*”.

Embora as respostas dessas estudantes sejam incompletas, as expressões destacadas sugerem que elas evocaram imagens conceituais relacionadas a

propriedade usada para obtenção de frações equivalentes, pois se referem às operações que devem ser realizadas com os termos de uma fração dada para se obter uma fração equivalente a ela.

Helena pareceu confirmar essa interpretação na atividade 2. Em sua resposta, mostrada na Figura 15, a estudante mais uma vez pareceu ter evocado imagens conceituais relacionadas a propriedade das frações equivalentes, embora cometa alguns equívocos ao realizar as operações com os termos das frações exemplificadas na esquerda. No entanto, nota-se que a estudante articulou os exemplos coerentemente com o respondido na atividade 1, pois apresentou um exemplo em que procurou mostrar frações equivalentes obtidas por meio da multiplicação dos termos de uma fração dada e outro exemplo no qual obtém frações equivalentes, mas por meio da divisão dos termos (simplificação).

Figura 15 – Resposta de Helena na atividade 2 do primeiro teste

Fonte: Acervo do autor, 2021.

Retomando o Segmento 1 apresentado anteriormente, pode-se ver que Helena argumentou sobre o porque acreditava que as frações da atividade 1 eram equivalentes dizendo: *Eu acho que são equivalentes porque ela tá multiplicando por dois, tipo... dois vezes dois, quatro. Quatro vezes dois, oito. Três vezes dois, seis. Seis vezes dois, doze.*

Helena se baseou na observação das frações $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{6}$ e $\frac{8}{12}$ para chegar a essa conclusão. Aparentemente, sua noção prévia, ainda que restrita, sobre o conceito de frações equivalentes foi confirmada ao perceber que as frações na atividade podem ser obtidas por meio da multiplicação dos seus termos por um número natural, levando-a argumentar de forma coerente em sua explicação. Com base nas respostas de Helena, percebe-se que a atividade 1 da Aula 1 (Figura 13), a discussão e as frações dadas contribuíram para que as imagens conceituais iniciais que Helena possuía acerca de frações equivalentes fossem ativadas durante a resolução da tarefa.

Zoe utilizou a propriedade das frações equivalentes para resolver as atividades 3 e 4. Na atividade 3, a estudante escolheu corretamente o item *b*, justificando sua escolha por meio do esquema mostrado na Figura 16.

Figura 16 – Resposta de Zoe na atividade 3 do primeiro teste

$$\frac{6 \overset{2}{\cancel{2}}}{8 \overset{2}{\cancel{2}}} = \frac{3 \overset{3}{\cancel{3}}}{4 \overset{3}{\cancel{3}}}$$

Fonte: Acervo do autor, 2021.

O esquema sugere que, inicialmente, a estudante observou a figura apresentada na questão e obteve a fração $6/8$, simplificando-a para obter a fração equivalente $3/4$.

Semelhantemente, na atividade 4 a estudante novamente aplicou a propriedade das frações equivalentes para verificar e comprovar a equivalência entre as frações $1/2$ e $3/6$, como mostra a Figura 17.

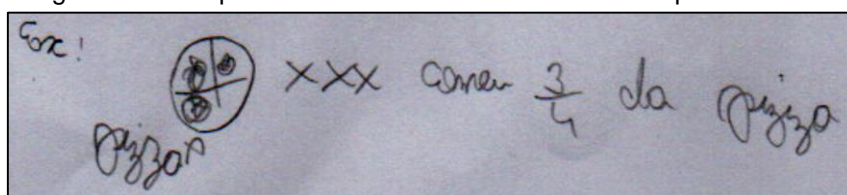
Figura 17 – Resposta de Zoe na atividade 4 do primeiro teste

$$\text{Sim. } \frac{1^3}{2} = \frac{3}{6}$$

Fonte: Acervo do autor, 2021.

O estudante Florisvaldo respondeu na atividade 1 o seguinte: “aquilo que equivale as partes comidas de uma pizza”. Na atividade 2 ele exemplificou sua ideia por meio de um esquema, mostrado na Figura 18.

Figura 18 – Resposta de Florisvaldo na atividade 2 do primeiro teste



Fonte: Acervo do autor, 2021.

O trecho sublinhado na resposta do estudante na atividade 1 e o esquema apresentado na resposta da atividade 2 sugerem que ele associou frações equivalentes com partes de um todo, que em seu exemplo é representado por uma pizza. Suas escolhas indicam que ele evocou imagens conceituais associadas ao processo de ensino e aprendizagem que vivenciou, inclusive mencionando um objeto comum (pizza) em livros didáticos. Além disso, é possível inferir que tais imagens podem estar relacionadas às práticas docentes desenvolvidas no ensino sobre o tema nas séries anteriores.

Na atividade 4, porém, Florisvaldo respondeu corretamente que as frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{6}$ são equivalentes e justificou mostrando que usou a propriedade das frações equivalentes ao dizer: “1 multiplicado por 3 é 3 e 2 multiplicado por 3 é 6”. Essa resposta nos leva a pensar que, embora não tenha se aproximado da definição do conceito de frações equivalentes nas atividades 1 e 2, o estudante pareceu ter evocado imagens relacionadas à propriedade para verificar a equivalência das frações, o que sugere a presença de imagens conceituais restritas, mas adequadas ao contexto restrito na qual a atividade 4 se inseria (TALL; VINNER, 1981).

Essa interpretação também pode ser aplicada ao caso da estudante Clara que, embora não tenha formulado nenhuma resposta nas atividades 1 e 2, respondeu às atividades 3 e 4 utilizando a propriedade das frações equivalentes. Essas respostas são mostradas na Figura 19.

Figura 19 – Respostas de Clara nas atividades 3 e 4 do primeiro teste

$6 \div 2 = 3$ $8 \div 2 = 4$	<p>Sim.</p> $1 \times 3 = 3$ $2 \times 3 = 6$
-------------------------------	---

Fonte: Acervo do autor, 2021.

Clara também lembrou dessa propriedade diante da atividade 1 da Aula 1. O trecho a seguir (Segmento 2) apresenta a discussão realizada em torno dessa atividade.

Segmento 2 – Discussão sobre a atividade 1 da Aula 1 com o grupo 2 do 7º D. Inicialmente, os estudantes mencionaram quais seriam as frações que representam as partes coloridas em cada barra apresentada na atividade (item a).

Em seguida, em relação ao item *b*, foi feita a leitura coletiva e foram propostas algumas questões auxiliares para introduzir os estudantes na discussão:

Professor-pesquisador: *Podemos afirmar que essas frações são equivalentes? Sim ou não e por quê? [...] Observem essas três frações e os três desenhos. O que tem de igual? Tem alguma coisa que pra vocês está igual?*

Clara: *Se multiplicar os dois números... Dois vezes dois, quatro. Três vezes dois, seis.*

Breno: *É que umas tem mais quadradinho, mas termina tudo na mesma linha, aí.*

Professor-pesquisador: *[...] Vamos pensar que sejam barras de chocolate, uma do Breno, uma da Clara e uma da Lara. Quem comeu mais chocolate?*

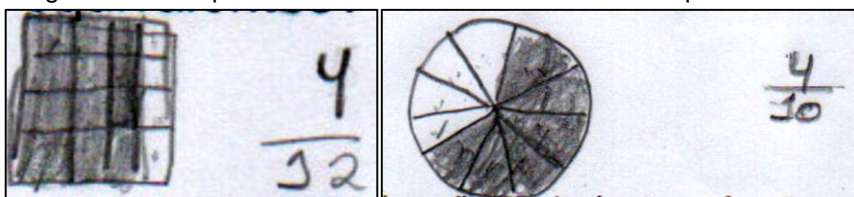
Vários estudantes: *Lara.*

Breno: *Ninguém, gente! Por que pode ter mais quadradinhos, mas sempre é a mesma quantidade de chocolate.*

Clara, no segmento apresentado, ao invés de formular uma definição para frações equivalentes, aparentemente observou e verificou a equivalência entre as frações da atividade por meio da propriedade. Apresentam-se destaques também nas falas de Breno pois, embora não tenha participado da primeira fase da pesquisa, articulou sua compreensão pessoal acerca do conceito de equivalência de forma coerente e utilizando elementos extraídos da atividade.

As respostas da estudante Rilari nas atividades 1 e 2 apresentaram uma particularidade interessante e estão apresentadas na Figura 20.

Figura 20 – Respostas de Rilari nas atividades 1 e 2 do primeiro teste



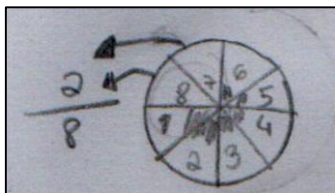
Fonte: Acervo do autor, 2021.

Embora as respostas apresentadas não possuam relação com o conceito de frações equivalentes ou com alguma propriedade relacionada a elas, chamam a atenção as frações indicadas. Em ambos os desenhos, as frações indicam a porção não sombreada. Isso parece indicar que, para a estudante, o conceito de frações equivalentes está relacionado com a porção que falta para se completar o inteiro.

A estudante raciocinou do mesmo jeito ao resolver a atividade 3, onde justificou a escolha pelo item *d* ($2/8$) dizendo: “Porque no círculo no total tem 8 [partes] e pintado tem 6 e em branco tem 2”.

Além de Rilari, outros estudantes escolheram o item *d* como resposta na atividade 3. Florisvaldo justificou sua escolha dizendo: “O total de partes são 8 e duas estão sem cor”. E Victor apresentou o esquema mostrado na Figura 21 como justificativa.

Figura 21 – Resposta de Victor na atividade 3 do primeiro teste



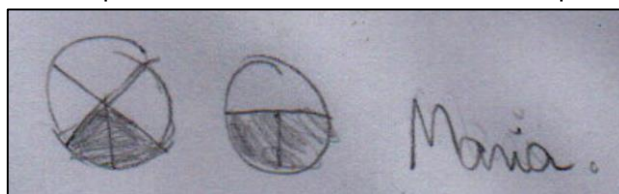
Fonte: Acervo do autor, 2021.

A análise realizada a partir das respostas nessa atividade apontam para lacunas no processo de ensino e aprendizagem sobre frações no qual os estudantes estiveram inseridos nos anos anteriores, produzindo imagens conceituais incoerentes com o conceito de frações equivalentes.

Em relação a atividade 5, nenhum dos estudantes utilizou a equivalência de frações para resolver o problema proposto, que dependia da comparação das frações $1/3$ e $2/5$ para se saber qual representa um valor maior. Isso sugere que nenhuma imagem conceitual sobre frações equivalentes associadas à comparação de frações foi mobilizada. No entanto, outras estratégias emergiram.

Os estudantes Adamastor, Victor, Florisvaldo e Max fizeram desenhos representando o objeto mencionado no problema, um pote de açaí, chegando a conclusões diferentes sobre qual das duas frações seria a maior. Mostra-se na Figura 22 o esquema proposto por Adamastor:

Figura 22 – Resposta de Adamastor na atividade 5 do primeiro teste



Fonte: Acervo do autor, 2021.

Pode-se perceber no desenho de Adamastor as irregularidades em relação ao tamanho das partes que compõem cada círculo, o que Merlini (2005) chama de

desprezo da conservação da área. Dessa forma, a comparação se torna imprecisa e pode conduzir ao erro, como de fato ocorreu. Isso reforça a importância da utilização das frações equivalentes como estratégia que produz resultados matematicamente seguros em relação aos desenhos, embora não seja a única maneira de se alcançar isso. Florisvaldo também utilizou desenhos, como mostrado na Figura 23.

Figura 23 – Resposta de Florisvaldo na atividade 5 do primeiro teste



Fonte: Acervo do autor, 2021.

Ao justificar sua resposta, Florisvaldo também argumentou que “o número de baixo da fração de Maria é menor do que a de Natália”, referindo-se às frações que representam a quantidade de açaí que Maria e Natália comeram. Florisvaldo pareceu mobilizar imagens conceituais relacionadas à comparação de frações cujos numeradores são iguais. Nesse caso, quanto menor é o denominador (termo de baixo), maior será a fração.

No entanto, os numeradores das frações desse problema não são iguais. Como no desenho de Adamastor, as figuras desenhadas por Florisvaldo são diferentes e possuem partes de tamanhos diferentes. Assim, o estudante concluiu a atividade de maneira equivocada.

Já as estudantes Nyck, Zoe e Mariana responderam usando como argumento a afirmação de que $\frac{2}{5}$ é maior que $\frac{1}{3}$, sem justificar essa conclusão.

Na atividade 6, também nenhum estudante utilizou a equivalência de frações para resolver o problema que, dentre outras possibilidades, poderia ser resolvido por meio da adição das frações envolvidas.

Os estudantes Nyck, Victor, Florisvaldo, Maria, Clara e Carlos apresentaram resposta iguais. Como exemplo, na Figura 24 é mostrada a resposta de Nyck.

Figura 24 – Resposta de Nyck na atividade 6 do primeiro teste

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2}{5}$$

Fonte: Acervo do autor, 2021.

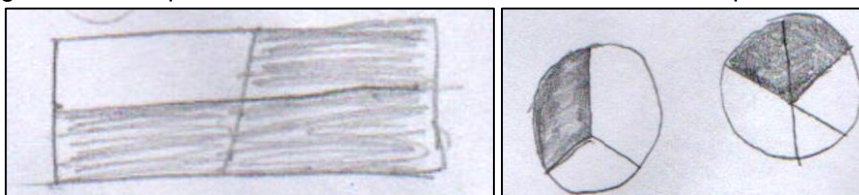
Os estudantes Jairo, Eduarda, Mariana e Rilari apresentaram como resposta a fração $2/5$ sem mostrar a operação envolvida como feito por Nyck. No entanto, essa resposta sugere que os estudantes tenham chegado na mesma conclusão.

Apesar de a maioria dos estudantes terem concluído que se tratava de um problema que envolve a adição de frações, ao realizarem a operação a fizeram de maneira equivocada. Segundo Giovanni Júnior e Castrucci (2018a), para adicionar ou subtrair números fracionários com denominadores diferentes, devemos obter frações equivalentes às frações dadas que tenham denominadores iguais. Em seguida, adicionamos ou subtraímos os numeradores e mantemos o denominador.

Observando o exemplo mostrado na Figura 24, percebe-se que a estudante Nyck e, conseqüentemente, os demais estudantes que responderam da mesma forma, equivocadamente adicionaram numeradores e denominadores de forma independente (MARTINHO, 2020). Tal procedimento sugere que os estudantes evocaram imagens conceituais equivocadas e não relacionadas à equivalência de frações como conceito útil na adição de frações com denominadores diferentes, operando com as frações como se fossem números naturais (BRASIL, 1997).

Por fim, encontrou-se nas respostas dos estudantes Adamastor e Paola esquemas baseados em desenhos de figuras. Os desenhos são mostrados na Figura 25.

Figura 25 – Respostas de Adamastor e Paola na atividade 6 do primeiro teste



Fonte: Acervo do autor, 2021.

Adamastor fez apenas um desenho retangular, mas não representou corretamente a fração que indica a junção das distâncias percorridas nos dois dias de viagem. Já Paola fez duas figuras circulares, numa tentativa de representar as frações envolvidas no problema separadamente. Essas respostas não esclarecem se os estudantes associaram a solução do problema com a adição de frações.

É possível que as imagens conceituais mobilizadas pelos estudantes estão associadas ao ensino e aprendizagem de frações indicando possíveis lacunas relacionadas a pouca familiaridade com situações semelhantes à apresentada no problema. Os desenhos de Adamastor e Paola se distanciam do contexto da atividade, que seria mais bem esquematizado, por exemplo, por meio de uma linha representando o percurso da viagem.

Além disso, foi possível perceber que o estudante Adamastor aparentemente mobilizou de forma consciente imagens conceituais sobre frações equivalentes, conforme feito na atividade 2, recordando e manipulando o conceito formulado por ele tendo em vista a necessidade de resolver as atividades 5 e 6, tentativa feita por meio de desenhos que, no entanto, se mostraram insuficientes para resolução correta das atividades.

De modo geral, considera-se que as imagens iniciais analisadas nesta seção, em ambas as categorias de análise, se mostraram fragmentadas quando comparadas com a matemática formal (ZANON, 2019), além de não haver conexão aparente entre imagens da definição do conceito e outras partes da imagem conceitual, como aquelas sobre as propriedades e características ligadas ao conceito de equivalência.

Observa-se também a ausência de uma visão utilitária sobre as frações equivalentes em situações que envolviam comparação, ordenação, adição e subtração de frações, pela não mobilização de imagens sobre o conceito estimuladas por essas situações.

Ou seja, embora alguns estudantes tenham evocado imagens da definição do conceito, nem sempre atuaram de acordo com ela (VINNER, 1983), especialmente nas situações práticas apresentadas nas atividades 5 e 6.

Percebe-se que a definição do conceito em momento algum foi preponderante, permanecendo inativa enquanto que imagens conceituais sobre propriedades derivadas do conceito foram evocadas no momento da realização das tarefas requeridas, possivelmente determinadas, dentre diversos outros fatores possíveis (VINNER, 1983), por processos cognitivos vinculados ao ensino e à aprendizagem

vivenciados pelos estudantes em anos anteriores, os quais lhes forneceram uma gama de exemplos que garantiram alguma experiência prévia para que soubessem lidar com algumas das situações apresentadas no primeiro teste (TALL; VINNER, 1981; VINNER, 1983; TALL, 1988).

Esses resultados apontam para o que Vinner (1983) disse ao afirmar que “a fim de lidar com os conceitos, é necessária uma imagem do conceito e não uma definição de conceito” (p. 293, tradução nossa²⁴), de modo que definições de conceito não serão relevantes pois, ao pensar, quase sempre o indivíduo evocará uma imagem conceitual.

4.2. MOVIMENTAÇÃO DE IMAGENS CONCEITUAIS

Na seção 4.1 foram discutidas as imagens conceituais iniciais apresentadas pelos estudantes com base principalmente nas respostas dadas no primeiro teste, aplicado na primeira fase da pesquisa. Essa primeira lista de tarefas foi realizada antes de qualquer aula sobre frações equivalentes no 7º ano pois o intuito era desvelar imagens conceituais iniciais, relacionadas ao conhecimento prévio dos estudantes em relação ao conceito de equivalência de frações.

Após a realização dessas atividades, os estudantes participaram de aulas sobre frações equivalentes, baseadas em três listas de atividades (Aula 1, Aula 2 e Aula 3) que foram realizadas por meio de discussões coletivas envolvendo o professor e a turma inteira (MINGUTA; ZANON, 2018). As atividades abordaram a definição do conceito de frações equivalentes, o uso da propriedade fundamental para obtenção e verificação de frações equivalentes, comparação, ordenação, adição e subtração de frações.

Posteriormente, os estudantes realizaram outro bloco de atividades, um segundo teste, na terceira etapa da pesquisa.

Os dados obtidos com as respostas dos estudantes nas atividades do segundo teste, em comparação com aquelas apresentadas no primeiro teste, forneceram base para ser analisado nesta seção o desenvolvimento individual das imagens conceituais (ZANON, 2019) sobre o conceito de frações equivalentes dos 13 estudantes que participaram de todas as atividades da pesquisa, almejando *verificar como as imagens*

²⁴ in order to handle concepts one needs a concept image and not a concept definition.

conceituais iniciais apresentadas pelos estudantes se modificam ou não durante a realização das atividades sobre frações equivalentes, em possíveis casos de reconstrução de imagens conceituais.

4.2.1 Categoria de análise

A partir dos dados obtidos e com base em Zanon (2019, p. 245), tomou-se a seguinte categoria de análise como referência para se examinar os dados nessa etapa da pesquisa: no que se refere ao processo de movimentação das imagens, a *reconstrução por inclusão/exclusão positiva/negativa* de alguma característica complementando ou substituindo a imagem conceitual anterior. Com relação aos cenários em que os processos de reconstrução podem ocorrer, podem indicar a existência de *imagem conceitual persistente, inapropriada sem melhoria, inadequada com melhoria, fragmentada e flexível*.

Zanon (2019) compreende a reconstrução de imagens conceituais com o sentido de dar uma nova formulação. Dessa forma, após todas as atividades e aulas sobre frações equivalentes, um estudante poderia reconstruir imagens conceituais acrescentando ou retirando informações delas quanto ao conceito (inclusão/exclusão) ao evocar e emitir uma nova imagem conceitual.

Uma inclusão poderia ser positiva quando uma nova informação, até então ausente nas respostas, estivesse relacionada com o conceito de equivalência; ou negativa, quando sem relação alguma com ele. Já a exclusão se daria quando um aspecto, até então presente na imagem conceitual, deixa de aparecer, o que poderia ser positivo caso o aspecto fosse incoerente em relação ao conceito, ou negativo caso estivesse corretamente associado ao conceito, não estando implícito em outros e novos aspectos pela reconstrução.

Quanto aos cenários em que essa reconstrução poderia ocorrer, Zanon (2019) explica que:

[...] o primeiro cenário [imagem conceitual persistente] indica que não houve evento significativo de aprendizagem. No segundo cenário [imagem conceitual inapropriada sem melhoria], o estudante substituiu uma imagem conceitual imprópria por outra imagem do mesmo tipo. O terceiro cenário [imagem conceitual inadequada com melhoria] foi marcado por uma substituição ou alteração de uma imagem conceitual inadequada por outra também inadequada. No entanto, a nova imagem conceitual foi aprimorada em comparação com a anterior. No quarto cenário [imagem conceitual fragmentada], considerou-se que, embora o aluno tenha adicionado a

definição do conceito à sua imagem conceitual, isso não afetou aquela já existente. Ou seja, o estudante não conectou a definição ao conceito. No quinto e último cenário [imagem conceitual flexível], considerou-se que o estudante compreendeu as ideias conceituais e, assim, mudou a imagem do conceito com sucesso. (ZANON, 2019, p. 244-245).

Assim, uma reconstrução de imagens conceituais estaria associada a algum desses cenários, descrevendo o que possivelmente pode ter ocorrido em relação à compreensão do estudante sobre o conceito de equivalência de frações.

4.2.2 Análise das imagens finais e reconstruções

Apresentam-se a seguir comentários e reflexões sobre os dados obtidos no primeiro e no segundo teste, com o intuito de analisar o possível desenvolvimento das imagens conceituais dos estudantes ao longo das atividades sobre frações equivalentes, isto é, o primeiro teste, as aulas e o segundo teste.

Em relação a atividade 1 do segundo teste [*O que são frações equivalentes?*], foi encontrada uma variedade de respostas que mostraram reconstruções pessoais de imagens conceituais da definição do conceito de equivalência de frações feitas pelos estudantes.

Em geral, as definições apresentadas eram compostas pelos seguintes aspectos sobre frações equivalentes: *representações diferentes, equivalência entre quantidades representadas pelas frações equivalentes em relação ao mesmo todo e o processo/propriedade usado para obtenção e verificação de frações equivalentes*. Quanto a esses aspectos, discute-se na seção anterior quão próximos ou não eles tornaram as imagens da definição em relação ao conceito formal, vinculando-as ao processo de ensino e aprendizagem.

No entanto, embora nem todos esses elementos estejam presentes na definição formal, considera-se positiva a inclusão deles nas imagens conceituais dos estudantes, pois elas não entram em conflito com o conceito (TALL, 1988, p. 37), são características úteis sobre frações equivalentes para sua compreensão e utilização, além de estarem respaldadas pela literatura técnica sobre o assunto (BERTONI, 2009; GIOVANNI JÚNIOR; CASTRUCCI, 2018a). Além disso, Tall e Vinner (1981) e Vinner (1983) afirmam que as imagens conceituais, e não as definições, é que são evocadas quando se faz necessário lidar com conceitos.

Na Tabela 13 estão as respostas dos estudantes na atividade 1 do segundo teste. Na sequência é feita uma discussão sobre essas respostas em comparação com aquelas fornecidas no primeiro teste, especialmente nas atividades 1 e 2.

Tabela 13 – Respostas na atividade 1 do segundo teste

O que são frações equivalentes?	
Estudante	Resposta
Ingrid	São frações que representam os mesmos valores.
Mariana	São quando os denominadores são iguais.

Figura 26 – Resposta de Paola na atividade 1 do segundo teste

Paola

$$\frac{6}{12} = \frac{3}{6} \quad / \quad \frac{6}{12} = \frac{2}{4}$$

Fonte: Acervo do autor, 2021.

Nyck	Frações que representam um mesmo valor.
Adamastor	Frações que representam a mesma porção de tamanho.
Florisvaldo	São frações que multiplicando dão o mesmo denominador.
Victor	Frações que tem números diferentes, mas que representam a mesma quantidade.
Jairo	Fração que equivale a outra com outros números.
Jade	Frações que quando multiplicadas dão o mesmo resultado, tanto numerador quanto denominador. É ter a mesma quantidade.

Figura 27 – Resposta de Zoe na atividade 1 do segundo teste

Zoe

$$\text{Ex: } \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$$

Fonte: Acervo do autor, 2021.

São duas frações iguais, mas escritas diferentes.

Figura 28 – Resposta de Clara na atividade 1 do segundo teste

Clara

$$\text{Ex: } \frac{1}{2} = \frac{4}{8}$$

Fonte: Acervo do autor, 2021.

Helena	São frações diferentes, porém com a mesma quantidade.
--------	---

Maria	São frações escritas de maneiras diferentes, mas que expressam o mesmo valor.
-------	---

Fonte: Elaborado pelo autor, 2021.

O estudante Adamastor, que no primeiro teste havia argumentado que frações equivalentes são “*frações que representam a mesma porção de espaço*”, no segundo teste respondeu que são “*frações que representam a mesma porção de tamanho*”.

Os trechos sublinhados se aproximam da definição do conceito proposta por Giovanni Júnior e Castrucci (2018a), conforme comentou-se na análise do primeiro teste, na primeira fase da pesquisa. No entanto, na reconstrução feita, Adamastor substituiu a palavra *espaço* por *tamanho*.

Isso sugere que a imagem conceitual que Adamastor possuía com relação a definição de frações equivalentes permaneceu estável. Embora não seja equivocada, tal imagem se mostra restrita à algum modelo geométrico, uma vez que a palavra *tamanho*, assim como *espaço*, parece se referir a área de figuras.

Nyck argumentou no primeiro teste que frações equivalentes são “*frações diferentes, mas que representam o mesmo valor*”. No segundo teste, respondeu que frações equivalentes são “*frações que representam um mesmo valor*”. Dessa forma, em sua reconstrução pessoal sobre o conceito, a estudante excluiu a referência relacionada às representações diferentes das frações equivalentes e manteve a referência à equivalência entre as quantidades que essas frações representam quando tomadas em relação ao mesmo todo, trecho destacado na resposta dada no segundo teste.

A estudante Ingrid no primeiro teste havia dito que frações equivalentes são “*frações que em um pode haver vários resultados*”, sugerindo com o trecho destacado alguma memória relacionada às representações diferentes entre elas. No entanto, no segundo teste respondeu que “*são frações que representam os mesmos valores*”. Embora possa ter clareza sobre as várias representações, na reconstrução apresentada Ingrid excluiu a referência a essa característica das frações equivalentes e incluiu a equivalência quanto à porção da unidade que as frações representam.

Maria no primeiro teste havia respondido que “*frações equivalentes pra mim é quando elas são divisíveis*”, além de mencionar “*divisão e multiplicação*” como aquilo que vinha à sua mente ao se falar de frações equivalentes. Ao analisar essas respostas na primeira etapa da pesquisa foi considerado que se tratava de uma memória que relacionava frações equivalentes às operações que devem ser

realizadas com os termos de uma fração dada para se obter uma fração equivalente a ela.

Porém, no segundo teste, Maria argumentou que “são frações escritas de maneiras diferentes, mas que expressam o mesmo valor”. Pode-se notar que ela reconstruiu sua definição incluindo, no primeiro trecho destacado, a característica das frações equivalentes omitida por Nyck sobre as representações diferentes. Além disso, incluiu outro aspecto da definição com o segundo trecho destacado, sobre frações equivalentes representarem a mesma porção da unidade.

A estudante Helena também incluiu esses aspectos em sua reconstrução. No primeiro teste havia dito que “frações equivalentes são as frações que dão para multiplicar e dividir”, também em referência ao processo/propriedade usado para se obter frações equivalentes a uma fração dada. Já na reconstrução que apresentou no segundo teste, disse que frações equivalentes “são frações diferentes, porém com a mesma quantidade”.

O estudante Victor, sobre frações equivalentes, respondeu no primeiro teste: “Pra mim frações equivalentes é quando você divide uma fração por dois e se for ímpar divide por três e o resultado é equivalente a fração que você dividiu”. Já no segundo teste, respondeu: “Frações que tem números diferentes, mas que representam a mesma quantidade”. De uma noção sobre o conceito de equivalência associada ao processo usado para obtenção e verificação de frações equivalentes, no primeiro teste, a reconstrução feita por Victor evocou tanto o aspecto relacionado às representações diferentes das frações equivalentes, quanto a característica de representarem porções iguais de um mesmo todo.

Clara, no primeiro teste não respondeu as atividades 1 e 2, que tratavam diretamente sobre a definição do conceito de frações equivalentes. No entanto, conforme mencionado ao analisar as suas imagens iniciais, se recordou da propriedade usada para obter e verificar frações equivalentes. No segundo teste, a estudante respondeu que frações equivalentes “são duas frações iguais, mas escritas diferentes”.

Essa resposta aponta para uma possível reconstrução das imagens conceituais de Clara em relação ao conceito de equivalência de frações, que incluiu o aspecto relacionado às representações diferentes de frações equivalentes, conforme segundo trecho destacado. Com *frações iguais* entende-se que Clara estivesse se referindo a característica de as frações equivalentes representarem a mesma quantidade em

relação a um mesmo todo, o que sugere a compreensão de que frações equivalentes podem ser substituídas entre si sem que se altere a quantia sobre a qual se referem. Nota-se também que a estudante não fez nenhum destaque relacionado a propriedade usada para obtenção de frações equivalentes.

Zoe argumentou no primeiro teste que “*frações equivalentes são aquelas que podem ser multiplicadas ou divididas por o número da fração*”, possivelmente numa referência à propriedade usada para se obter frações equivalentes. Já no segundo teste, sobre frações equivalentes respondeu: “*É ter a mesma quantidade*” e apresentou um esquema (Figura 28) que mostra o processo de obtenção da fração $\frac{5}{9}$ a partir da divisão dos termos da fração $\frac{10}{18}$ por 2, uma simplificação.

Assim, a reconstrução de Zoe mostrou imagens conceituais estáveis sobre sua noção quanto a propriedade usada para obtenção de frações equivalentes e incluiu, com o trecho destacado, uma referência sobre a característica de as frações equivalentes representarem porções iguais quando tomadas de um mesmo todo.

O estudante Jairo no primeiro teste não formulou respostas nas atividades 1 e 2, quanto ao que se recordava sobre frações equivalentes, e nem se recordou da propriedade das frações equivalentes para resolver as demais atividades. No segundo teste, no entanto, sobre frações equivalentes disse: “*Fração que equivale a outra com outros números*”. A partir dessa formulação, percebe-se que o estudante evocou imagens conceituais sobre a definição que incluem a característica relacionada às representações diferentes das frações equivalentes.

Já a estudante Paola, tanto no primeiro teste quanto no segundo, apresentou esquemas que ilustram a aplicação da propriedade usada para obtenção de frações equivalentes, como resposta sobre o que são frações equivalentes, conforme apresentado nas Figuras 5, 6 e 27.

Paola, no segundo teste, apresentou exemplos de frações equivalentes obtidas tanto por meio da multiplicação como da divisão dos seus termos, mostrando familiaridade com o procedimento. Essas respostas sugerem a existência de imagens conceituais estáveis que relacionam fortemente o conceito de frações equivalentes com a propriedade lembrada, mencionada e exemplificada por Paola.

Mariana e Florisvaldo, no segundo teste, também evocaram imagens conceituais reconstruídas que relacionam o processo de obtenção de frações equivalentes ao conceito de equivalência.

No primeiro teste, Mariana não apresentou respostas sobre o que se lembrava de frações equivalentes. Já Florisvaldo, respondeu que frações equivalentes são “*aquilo que equivale as partes comidas de uma pizza*”, sugerindo alguma memória proveniente do processo de ensino e aprendizagem quando frações equivalentes possam ter sido apresentadas a partir de exemplos, explicações e exercícios que utilizaram figuras de pizzas repartidas em fatias para representar a ideia da equivalência, uma situação comum em livros didáticos.

Esses estudantes responderam no segundo teste, respectivamente, do seguinte modo sobre frações equivalentes: “*São quando os denominadores são iguais*” e “*São frações que multiplicando dão o mesmo denominador*”.

Nota-se que os elementos destacados nessas reconstruções incluíram uma noção equivocada sobre frações equivalentes. Esses estudantes relacionaram frações equivalentes ao processo de redução de frações a um denominador comum. Trata-se da transformação de frações de denominadores diferentes em frações equivalentes as anteriores, mas com denominadores iguais, ideia usada, por exemplo, em problemas que envolvem a comparação, ordenação, adição e subtração de frações com denominadores diferentes.

Jade, que no primeiro teste disse que “*fração equivalente é parecida com frações reduzível e irreduzível*”, no segundo teste argumentou que são “*frações que quando multiplicadas dão o mesmo resultado, tanto numerador quanto denominador*”. Apesar da articulação das ideias estar confusa, os trechos destacados sugerem que a estudante, em sua reconstrução, evocou imagens que incluem noções relacionadas a propriedade das frações equivalentes, tendo em vista que ao multiplicar numerador e denominador de uma fração por um número, obtemos uma fração equivalente a fração dada.

A fim de verificar a validade dessa interpretação, observa-se a resposta de Jade na atividade 2 (Figura 26) do segundo teste.

Figura 29 – Resposta de Jade na atividade 2 do segundo teste

$\frac{6 \times 4}{8 \times 4}$	$\frac{3 \times 8}{4 \times 8}$
$\frac{24}{32}$	$\frac{24}{32}$

Fonte: Acervo do autor, 2021.

Jade reduziu as frações $\frac{6}{8}$ e $\frac{3}{4}$ ao mesmo denominador, 32. Esse procedimento comprova que as frações são de fato equivalentes, mas poderia ser evitado pois dividindo os termos da fração $\frac{6}{8}$ por 2 obtém-se a fração $\frac{3}{4}$, mostrando que ambas são equivalentes. Essa ação de Jade parece indicar que a estudante compreende frações equivalentes como frações que possam ser reduzidas ao mesmo denominador, como Florisvaldo e Mariana.

Em síntese, com base na definição formal de frações equivalentes, nas características e propriedades relacionadas a elas e presentes nas imagens iniciais dos estudantes, e nas reconstruções das imagens conceituais da definição evocadas por eles, houveram os seguintes movimentos de reconstrução:

- Inclusão positiva da característica relacionada às representações diferentes, feita pelos estudantes Victor, Jairo, Clara, Helena e Maria.
- Inclusão positiva da característica das frações equivalentes como representantes da mesma porção do inteiro, feita pelos estudantes Maria, Helena, Clara, Zoe, Victor e Ingrid.
- Exclusão positiva da característica relacionada ao processo/propriedade usado para obtenção e verificação de frações equivalentes, feita por Maria, Helena, Victor e Zoe.
- Inclusão negativa da característica relacionada ao processo/propriedade usado para obtenção e verificação de frações equivalentes, mencionado em forma de texto, feita pelos estudantes Mariana, Jade e Florisvaldo.
- Exclusão negativa da característica relacionada às representações diferentes, feita pelos estudantes, feita por Nyck e Ingrid.

- Adamastor e Paola não apresentaram movimentação por reconstrução em suas imagens conceituais da definição do conceito de frações equivalentes.

Na atividade 2 do segundo teste [*Das frações abaixo, qual é equivalente a fração representada pelas partes pintadas na figura? Explique por que você escolheu essa fração*], que era igual a atividade 3 do primeiro teste, identificam-se três estratégias diferentes utilizadas pelos estudantes que resumiram os modos com que eles pensaram a abordagem à tarefa.

Na Figura 30, é apresentada a resolução proposta por Zoe.

Figura 30 – Resposta de Zoe na atividade 2 do segundo teste

$$\frac{6:2}{8:2} = \frac{3}{4}$$

Ou dividi

Fonte: Acervo do autor, 2021.

Zoe representa corretamente a porção pintada na figura com a figura $6/8$, a partir da qual aplica a propriedade das frações equivalentes para obter, por simplificação, a fração $3/4$.

Na Figura 31, é apresentada a resolução feita por Helena.

Figura 31 – Resposta de Helena na atividade 2 do segundo teste

$$\frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 2} = \frac{6}{8}$$

Fonte: Acervo do autor, 2021.

Helena justifica sua resposta de forma oposta ao que foi feito por Zoe. A estudante parte da fração $3/4$ e, multiplicando ambos os termos por 2, obtém a fração $6/8$, verificando a equivalência entre elas.

Além dessas estratégias, outro esquema foi o proposto por Jade, já apresentado na Figura 26. Jade transformou as frações $\frac{6}{8}$ (obtida pelo desenho) e $\frac{3}{4}$ em frações equivalentes com o mesmo denominador (32), possivelmente por meio da multiplicação dos numeradores iniciais, 4 e 8. Multiplicando o numerador da primeira fração (3) por 8 e o da segunda fração (6) por 4, obteve os novos numeradores das frações equivalentes, ambos 24. Logo, as frações equivalentes obtidas foram as mesmas ($\frac{24}{32}$), o que mostrou que as frações iniciais eram equivalentes.

Já o estudante Adamastor justificou sua escolha explicando: “*marquei a que tem o denominador e o numerador pela metade da fração anterior*”. Adamastor observou que os termos da fração $\frac{3}{4}$ são metade dos termos da fração $\frac{6}{8}$, essa última que obteve observando a porção pintada no desenho.

Em relação a atividade 2, dos 36 estudantes que realizaram o segundo teste, 18 a realizaram corretamente (50%). Dos 13 estudantes que participaram de todas as atividades e etapas da pesquisa e que tiveram as reconstruções de imagens conceituais analisadas, 12 acertaram (aproximadamente 92%).

Em relação à atividade 3 [*Numa cidade, $\frac{3}{7}$ da população torce pelo Flamengo e $\frac{2}{5}$ torce pelo Botafogo. Que time tem mais torcedores?*], um problema sobre comparação de frações, uma das maneiras de resolvê-lo seria por meio de frações equivalentes. Uma vez que os denominadores das frações dadas são diferentes, é necessário tratar de substituí-las por outras equivalentes a cada uma delas, com denominadores iguais entre si (BERTONI, 2009), e em seguida fazer a comparação e decidir qual das duas representa uma quantidade maior de torcedores, pela observação apenas dos numeradores: quanto maior o numerador, maior será a fração, uma vez que os denominadores agora são iguais (GIOVANNI JÚNIOR; CASTRUCCI, 2018a).

Apresenta-se na Figura 32 a resolução proposta por Paola como exemplo da estratégia, empregada por diversos estudantes na resolução da atividade.

Figura 32 – Resposta de Paola na atividade 3 do segundo teste

$$\frac{3}{7} \times 5 = \frac{15}{35} \quad \frac{2}{5} \times 7 = \frac{14}{35}$$

Fonte: Acervo do autor, 2021.

Paola obtém as frações $15/35$ e $14/35$, equivalentes a $3/7$ e a $2/5$, respectivamente, e conclui que “O time que tem mais torcedores é o Flamengo”.

Assim como Paola, outros estudantes que participaram do segundo teste também resolveram essa atividade de forma correta e utilizando frações equivalentes como estratégia.

Em comparação com a atividade 5 do primeiro teste, que tratou de um problema semelhante que envolvia a comparação de frações, considera-se uma evolução principalmente em relação ao desempenho do grupo de estudantes que participou de todas as atividades que compuseram a pesquisa. Naquela ocasião, nenhum estudante havia respondido corretamente à questão, embora tenham emergido algumas estratégias interessantes, que apontavam para a presença de imagens conceituais iniciais, mas incipientes, relacionadas ao processo de ensino e aprendizagem. No entanto, tais estratégias foram mal sucedidas.

Dos 36 estudantes que fizeram o segundo teste, 17 resolveram a atividade 3 corretamente, aproximadamente 47% desse grupo. Considerando apenas os 13 estudantes que participaram de todas as atividades e etapas da pesquisa, 11 resolveram corretamente, aproximadamente 85% desse grupo.

Sobre a atividade 4 [*Guilherme toma $1/4$ de uma jarra de suco de laranja de manhã, $1/3$ da mesma jarra durante o almoço e o restante a noite. Que fração da jarra de suco ele consome durante o dia? E a noite?*], trata-se de um problema que envolve adição e subtração de frações, que poderia ser resolvido por meio de frações equivalentes tendo em vista que os denominadores das frações dadas são diferentes, estratégia que se esperava que fosse utilizada pelos estudantes.

Apresenta-se na Figura 31 a resolução proposta por Nyck como exemplo dessa estratégia, empregada por ela na resolução da atividade.

Figura 33 – Resposta de Nyck na atividade 4 do segundo teste

The image shows a student's handwritten work for the problem. It consists of two equations. The first equation is $\frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{3}{12} + \frac{4}{12} = \frac{7}{12}$. The second equation is $\frac{12}{12} - \frac{7}{12} = \frac{5}{12}$. There are some additional markings like 'x3' and 'x4' above the fractions, and a large curly brace grouping the two equations.

Fonte: Acervo do autor, 2021.

A estudante observa que as frações dadas possuem denominadores diferentes, tratando de transformá-las em outras equivalentes às iniciais, mas com

denominadores iguais, as frações $\frac{3}{12}$ e $\frac{4}{12}$. Assim, torna-se possível realizar a adição das frações, somando os numeradores e mantendo o denominador, obtendo $\frac{7}{12}$ (BERTONI, 2009; GIOVANNI JÚNIOR; CASTRUCCI, 2018a). Essa fração representa a porção da jarra de suco consumida durante o dia.

Em relação a porção da jarra que representa a quantidade de suco consumida a noite, Nyck aparentemente compreendeu que se tratava da quantidade que sobra na jarra após ser retirada a quantidade consumida durante o dia. Essa ideia se traduz numa subtração entre a quantidade que representa a jarra inteira (1) e o que foi consumido durante o dia, $\frac{7}{12}$ da jarra. Dessa forma, Nyck escreveu o inteiro na forma equivalente $\frac{12}{12}$, já que a outra fração possui denominador 12, obtendo a fração $\frac{5}{12}$ após realizar a subtração usando o mesmo procedimento aplicado na adição (subtrair numeradores e manter o denominador).

Na Figura 34, temos a resolução proposta por Helena. Para responder a primeira pergunta da tarefa [*Que fração da jarra de suco ele consome durante o dia?*], a estudante realiza o mesmo procedimento adotado por Nick. No entanto, usa outra estratégia para responder a segunda pergunta [*E a noite?*].

Figura 34 – Resposta de Helena na atividade 4 do segundo teste

$$\begin{array}{r} \text{a noite} = \frac{5}{12} \\ \hline \frac{12}{12} \\ - \frac{7}{12} \\ \hline \frac{5}{12} \end{array}$$

Fonte: Acervo do autor, 2021.

Percebe-se que Helena, ao invés de expressar uma subtração de frações, realizou a subtração ($12 - 7 = 5$) entre o denominador e o numerador da fração que representava a quantidade de suco consumida durante o dia. Na ideia de frações como parte de um todo, presente nesse problema, entende-se que o denominador representa o total de partes em que o objeto foi dividido. Assim, de 12 partes, 7 foram consumidas durante o dia, e o restante das partes, 5, à noite.

Essa estratégia, inclusive, havia surgido espontaneamente na Aula 3 sobre frações equivalentes realizada com o grupo 2 do 7º D. No segmento abaixo (Segmento 3) apresenta-se um trecho da discussão empreendida nessa ocasião.

Segmento 3 – Discussão sobre a atividade 5 da Aula 3 com o grupo 2 do 7º D.

Inicialmente, o estudante Breno fez a leitura da atividade:

Uma pesquisa sobre jogos eletrônicos feita com alunos do 7º ano da escola de Jaqueira mostrou que: $\frac{1}{4}$ dos alunos preferem jogar *Garena Free Fire*; $\frac{2}{3}$ dos alunos preferem jogar *PUBG*; o restante dos alunos não gosta de jogos eletrônicos. Que fração representa a quantidade de alunos que gostam de jogos eletrônicos? E qual fração representa a quantidade de alunos que não gostam de jogos eletrônicos?

Após se discutir sobre as maneiras de responder a primeira pergunta da atividade, os estudantes apontaram que seria resolvida por meio da adição de frações, percebendo que o fato de as frações $\frac{1}{4}$ e $\frac{2}{3}$ possuírem denominadores diferentes levaria à necessidade de se obter frações equivalentes às dadas, com denominadores comuns ($\frac{3}{12}$ e $\frac{8}{12}$) para em seguida realizar a adição das frações e obter $\frac{11}{12}$. Essa fração representava, então, a porção dos alunos que gostavam de jogos eletrônicos.

Em seguida, passou-se a discutir a segunda pergunta. Nesse momento Breno fez uma intervenção:

Professor-pesquisador: *E qual fração representa a quantidade de alunos que não gosta de jogos?*

Breno: *Calma aí! É menos.*

Clara: *1/12.*

Professor-pesquisador: *De onde saiu esse 1/12?*

Clara: *É que falta 1 pra chegar em 12.*

Professor-pesquisador: *Era isso que você iria falar Breno?*

Breno: *Eu fiz 12 – 11.*

Professor-pesquisador: *Nesse caso deu pra fazer de cabeça, né...*

Breno: *Se fosse número grande teria que fazer a conta...*

Professor-pesquisador: *Entendi. Por exemplo se fosse a fração 25/97. Quanto faltaria pra completar o inteiro?*

Breno: *Faria 97 – 25.*

Novamente, é possível perceber uma evolução no desempenho dos estudantes nessa atividade em comparação com a atividade 6 do primeiro teste, que era similar a essa. Naquela ocasião nenhum deles havia respondido corretamente à questão, além de não apresentarem nenhum registro que apontasse para a existência de imagens conceituais que relacionassem esse tipo de problema com frações equivalentes.

Dos 36 estudantes que fizeram o segundo teste, 16 resolveram essa atividade corretamente, aproximadamente 44% desse grupo. Considerando apenas os 13

estudantes que participaram de todas as atividades e etapas da pesquisa, 12 resolveram corretamente, aproximadamente 92% desse grupo.

Em síntese, assim como Zanon (2019, p. 292), “reconhecemos que é difícil acessar a imagem conceitual de alguém em sua totalidade”. Porém, tendo em vista as reconstruções observadas nas imagens conceituais sobre equivalência de frações a partir dos dados fornecidos pelos estudantes nas atividades do segundo teste; e tendo em vista o desempenho desses estudantes nessas mesmas atividades quando em comparação com o desempenho no primeiro teste, pode-se concluir de modo geral, também nos termos de Zanon (2019, p. 266), que em relação aos cenários nos quais as reconstruções ocorreram, eles indicam imagens conceituais flexíveis que foram alteradas “para incluir ou acomodar novas maneiras de ver o conceito” e, embora apropriadas, elas não explicam “o conceito com precisão, mas mostra que ocorreu algum evento de aprendizagem”.

Mesmo nos casos onde não foram observadas reconstruções nas imagens da definição (Adamastor e Paola) verifica-se que em relação ao desenvolvimento das tarefas houve sucesso. Além disso, as imagens iniciais desses estudantes, ainda que imprecisas em relação à definição formal, não eram incorretas.

Assim, após as aulas, no segundo teste, esses estudantes demonstraram coerência em relação às suas imagens iniciais sobre a definição e compreensão que lhes faltava para lidar com as tarefas feitas incorretamente anteriormente, no primeiro teste.

O mesmo argumento se aplica às estudantes cujas reconstruções manifestaram exclusões negativas (Nyck e Ingrid), pois as alterações não se configuraram significativas a ponto de comprometer a compreensão das estudantes em relação ao conceito e sua aplicabilidade nas tarefas, conforme observado também ao longo das discussões nas aulas. Além disso, tais resultados estão de acordo com Tall e Vinner (1981, p. 152, tradução nossa²⁵) que esclarecem que

À medida que a imagem do conceito se desenvolve, ela não precisa ser coerente o tempo todo. O cérebro não funciona assim. A entrada sensorial excita certas vias neuronais e inibe outras. Desta forma, diferentes estímulos podem ativar diferentes partes da sua imagem do conceito, desenvolvendo-as de uma forma que não precisa constituir um todo coerente.

²⁵ As the concept image develops it need not be coherent at all times. The brain does not work that way. Sensory input excites certain neuronal pathways and inhibits others. In this way different stimuli can activate different parts of the concept image, developing them in a way which need not make a coherent whole.

No entanto, vale destacar que considerou-se conveniente retomar as atividades do segundo teste em uma aula realizada após a terceira etapa da pesquisa, a fim de empreender nova discussão com a turma toda para evitar equívocos conceituais (ZANON, 2019) provocados pela possível não compreensão de algum aspecto relacionado ao conceito de frações equivalentes e sua importância no contexto matemático, tendo em vista as reconstruções observadas nas imagens de alguns estudantes, como Mariana, Jade e Florisvaldo que fizeram uma inclusão equivocada acerca do conceito.

Preocupamo-nos em que não houvesse tal conflito com imagens equivocadas que poderiam se tornar imagens persistentes (ZANON, 2019) e, com isso, prejudiciais para os estudantes na sequência da escolaridade, pois tais imagens “podem determinar toda uma linha de pensamento que infelizmente leva a erros graves” (VINNER, 1983, p. 304, tradução nossa²⁶).

²⁶ can determine a whole line of thought which unfortunately leads to serious mistakes.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presente pesquisa tomou por objetivo **analisar as imagens conceituais evocadas, durante a resolução de atividades sobre equivalência de frações, por estudantes do 7º ano do ensino fundamental de uma escola municipal de Presidente Kennedy/ES.**

Nesse propósito, foram desenvolvidas uma série de atividades com os estudantes participantes da pesquisa que foram divididas em três etapas. Na primeira etapa, foi aplicado um primeiro teste com o intuito de identificar as imagens conceituais iniciais sobre frações equivalentes apresentadas pelos estudantes na resolução de atividades sobre o conteúdo.

Buscava-se, a partir das respostas dos estudantes, desvelar imagens conceituais relacionadas aos conhecimentos prévios quanto ao conceito de frações equivalentes e, com disso, fazer uma avaliação diagnóstica a respeito do estágio em que se encontrava tais conhecimentos e do processo de ensino e aprendizagem vivenciado pelos estudantes.

Assim, os resultados mostraram que as imagens iniciais dos estudantes, sobre frações equivalentes, não eram vazias. Tratavam-se de imagens da definição do conceito e de outros aspectos associados ao conceito, fragmentadas e incipientes, que indicaram influências do processo de ensino e aprendizagem anterior ao 7º ano.

Na segunda etapa da pesquisa, foram desenvolvidas três aulas sobre frações equivalentes que abordaram o conceito, obtenção e verificação, comparação, ordenação, adição e subtração de frações. Utilizou-se uma metodologia baseada em discussões coletivas em associação a atividades previamente selecionadas por possuírem características que favorecem tanto as discussões, a construção e o desvelar de imagens conceituais, dando subsídios à origem do produto final proveniente desta pesquisa, um guia didático com orientações e sugestões de atividades para o ensino e aprendizagem de frações equivalentes na perspectiva da análise de imagens conceituais (APÊNDICE A).

Por fim, na terceira etapa, foi aplicada uma nova lista de atividades, o segundo teste, com o intuito de verificar como as imagens conceituais iniciais apresentadas pelos estudantes se modificam ou não durante a realização das atividades sobre frações equivalentes.

Como resultados, foram encontradas reconstruções de imagens conceituais, em relação às iniciais obtidas na primeira etapa, baseadas em inclusões e exclusões de características relevantes relacionadas às frações equivalentes nas definições do conceito formuladas pelos estudantes. Essas reconstruções, observadas no segundo teste, indicaram um cenário com a presença de imagens conceituais flexíveis, que sofreram alterações para incluir novas informações e percepções sobre conceito, que não explicam o conceito com precisão, mas indicam a ocorrência de algum evento de aprendizagem.

Esses resultados podem ser atribuídos às escolhas metodológicas relacionadas com as atividades especificamente selecionadas e à condução das aulas por meio de discussões matemáticas envolvendo a turma toda. Essas escolhas potencializaram a construção ou reconstrução de imagens conceituais bem como o desvelar delas. No entanto, devido aos casos em que essa movimentação se mostrou negativa, foi feita uma nova abordagem coletiva das atividades a fim de evitar que imagens equivocadas e em conflito com o conceito permanecessem com os estudantes.

Do ponto de vista da prática docente, foi possível observar algumas consequências oriundas do trabalho pautado em investigar imagens conceituais. Tanto a seleção de atividades específicas como a condução das aulas oportunizaram momentos em que cada estudante foi alvo de reflexões. Antes, durante e após a aplicação das aulas, foi possível criar uma aproximação maior dos estudantes e das suas ideias, dúvidas, além de perceber dificuldades, anseios e resistências em relação à matemática e até mesmo em relação ao professor.

Essa aproximação e percepções foram fruto do encorajamento gerado nos estudantes para se expressarem à sua maneira, de modo que tanto nas discussões como nos registros escritos firmou-se que todos teriam liberdade para apresentar o seu pensamento, equivocado ou não e, inclusive, quando não se havia o que registrar. Dessa forma, foi possível se perceber virtudes, potencialidades e lacunas até então não apreciadas nos estudantes com o grau de detalhamento proporcionado pelas ações adotadas para a pesquisa.

Assim, entende-se que os objetivos traçados inicialmente para a pesquisa foram alcançados. No entanto, considerando as limitações impostas pelo objetivo traçado para o presente trabalho, é possível apontar alguns temas que podem ser abordados em pesquisas futuras, avançando os conhecimentos e contribuindo com o

desenvolvimento da Educação Matemática bem como do ensino e da aprendizagem sobre os números racionais.

Sugere-se, então, pesquisas que investiguem o comportamento das imagens conceituais sobre frações diante de abordagem que leve em conta seus variados significados. Além disso, pesquisas que proponham formações como produto, visando preparar professores para utilização da análise de imagens conceituais na prática docente.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, T. R. de. **Sistema de Ensino Aprende Brasil: matemática: 7º ano**. Curitiba: Aprende Brasil, 2019.

ANDRADE, D. M.; SCHMIDT, E. B.; MONTIEL, F. C.; ZITZKE, V. A. Atividades remotas em tempos de pandemia da covid-19: possíveis legados à Educação. **Revista de Estudos e Pesquisas sobre Ensino Tecnológico**, v. 6, e150120, 2020. Disponível em: <<https://sistemascmc.ifam.edu.br/educitec/index.php/educitec/article/view/1501/591>> . Acesso em: 31 mai. 2021.

BEHR, M.; LESH, R.; POST, T.; SILVER, E. Rational number concepts. In: LESH, R.; LANDAU, M. (Eds.). **Acquisition of mathematics concepts and processes**. New York: Academic Press, p. 91-125. 1983.

BERTONI, N. E. **Educação e Linguagem Matemática IV: Frações e Números Fracionários**. Brasília: Universidade de Brasília, 2009.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: primeiro e segundo ciclos: matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: terceiro e quarto ciclos: matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. **Plano de Desenvolvimento da Educação: Prova Brasil, ensino fundamental, matrizes de referência, tópicos e descritores**. Brasília: MEC/SEB/INEP/MEC, 2011.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC): Educação é a Base**. Brasília, MEC/CONSED/UNDIME, 2017. Disponível em: <<http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/02/bncc-20dez-site.pdf>>. Acesso em: 19 dez. 2020.

CANOVA, R. F. **Um estudo das situações parte-todo e quociente no ensino e aprendizagem do conceito de fração**. 2013. 196 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Bandeirante Anhangüera, São Paulo, 2013.

CHEQUETTO, J. J. **Uma experiência didática para a aprendizagem de frações: matemática para residentes de uma casa de passagem**. 2016. 155 f. Dissertação (Mestrado em Ensino na Educação Básica) – Centro Universitário Norte do Espírito Santo, Universidade Federal do Espírito Santo, São Mateus, 2016.

D'AMBROSIO, U. **Educação Matemática: da teoria à prática**. 17. ed. Campinas: Papirus, 2009.

DAMICO, A. **Uma investigação sobre a formação inicial de professores de Matemática para o ensino de números racionais no Ensino Fundamental**. 2007.

313 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

FAASEN, S. **Análise de uma proposta pedagógica de construção e aplicação de dominó de frações equivalentes**. 2017. 38 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Departamento de Física e Matemática, Universidade Federal de São João del-Rei, Ouro Branco, 2017.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos**. 2. ed. Campinas: Autores Associados, 2007.

GARCEZ, W. R. **Tópicos sobre o ensino de frações: equivalência**. 2013. 78 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2013.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 6. ed. São Paulo: Editora Atlas, 2002.

GIOVANNI JR., J. R.; CASTRUCCI, B. **A conquista da matemática**, 6. São Paulo: FTD, 2018a.

GIOVANNI JR., J. R.; CASTRUCCI, B. **A conquista da matemática**, 7. São Paulo: FTD, 2018b.

JAHN, A. P.; CAMPOS, T. M. M.; SILVA, M. C. L.; SILVA, M. J. F. Lógica das Equivalências. In: REUNIÃO ANUAL DA ASSOCIAÇÃO NACIONAL DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA EM EDUCAÇÃO, 22, 1999, Caxambu. **22ª Reunião Anual da Anped: Diversidade e Desigualdade - Desafios para a Educação na fronteira do século**. São Paulo: SDF Informática, 1999. p. 1-21.

KIEREN, T. E. Personal Knowledge of Rational Numbers: Its Intuitive and Formal Development. In: HIEBET, J.; BEHR, M. (Eds). **Number Concepts and Operations in the Middle Grades**, p. 80-162, 1988.

LOPES, A. F. **Movimento formativo de professores dos anos iniciais sobre diferentes significados de frações e suas relações com o ensino**. 2017. 227 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Instituto Federal do Espírito Santo, Vitória, 2017.

MANDARINO, M. C. F. Números e operações. In: CARVALHO, J. B. P. F. de. (Coord.). **Matemática: ensino fundamental**. Brasília: MEC/SEB, 2010. p. 97-134.

MARQUES, P. P. M. R. A pandemia sars-cov-2 (covid-19) e as condições de professores que ensinam matemática: caminhos e impressões iniciais. In: ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 24, 2020, Cascavel. **Anais...** Cascavel: UNIOESTE, 2020. Disponível em: <<https://drive.google.com/file/d/13lzMOqCJdt1y8zzfmHpRB2qfyQCrJ-xk/view?usp=sharing>>. Acesso em: 31 mai. 2021.

MARTINHO, G. A. **Ensino de equivalência de frações para compreensão das operações de adição e subtração**. 2020. 277 f. Dissertação (Mestrado em Educação e Docência) – Faculdade de Educação, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2020.

MENDES, I. A. **Matemática e Investigação em sala de aula: tecendo redes cognitivas na aprendizagem**. 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

MENOTTI, R. M. **Frações e suas operações: Resolução de Problemas em uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem**. 2014. 154 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2014.

MERLINI, V. L. **O conceito de fração em seus diferentes significados: um estudo diagnóstico com alunos de 5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental**. 2005. 215 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

MIGUEL, A.; GARNICA, A. V. M.; IGLIORI, S. B. C.; D'AMBROSIO, U. A educação matemática: breve histórico, ações implementadas e questões sobre sua disciplinarização. **Revista Brasileira de Educação**. n. 27. p. 70-93. 2004.

MIGUEL, J. C. O ensino de Matemática na perspectiva da formação de conceitos: implicações teórico-metodológicas. **Núcleos de Ensino da UNESP: Artigos dos Projetos realizados em 2003**. p. 375-394. 2005. Disponível em: <<https://www.unesp.br/prograd/PDFNE2003/O%20ensino%20de%20matematica.pdf>>. Acesso em 28 mai.2021.

MINAYO, M. C. S. (Org.). **Pesquisa social: Teoria e método e criatividade**. 29. ed. Petrópolis: Vozes, 2002.

MINGUTA, A.; ZANON, T. X. D. **Ações do futuro professor na condução de discussões matemáticas sobre frações equivalentes**. 2018. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Licenciatura em Matemática) - Instituto Federal do Espírito Santo, campus Cachoeiro de Itapemirim.

NASCIMENTO, S. C. B. do. **Resolução de problemas matemáticos: uma contribuição para o processo de ensino-aprendizagem dos estudantes da 1ª série do Ensino Médio**. 2020. 118 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação, Ciência e Tecnologia) – Faculdade Vale do Cricaré, São Mateus, 2020.

NUNES, T.; BRYANT, P.; PRETZLIK, U.; BELL, D.; EVANS, D.; WADE, J. Children's understanding of fractions. **Contrapontos**, Itajaí, v. 8, n. 3, p. 509-517, 2008.

NUNES, T.; BRYANT, P. Paper 3: Understanding rational numbers and intensive quantities. In: NUNES, T.; BRYANT, P; WATSON, A. **Key understandings in mathematics learning**, Londres, Nuffield Foundation, 2009.

SANTOS, V. M. P. dos. (Org.). **Avaliação de aprendizagem e raciocínio em matemática: métodos alternativos**. Rio de Janeiro: Projeto Fundão, Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, 1997.

SANTOS, V. M. P. dos. Consciência metacognitiva de futuros professores primários numa disciplina de matemática e um exame de seu conhecimento, concepções e consciência metacognitiva sobre frações. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 1, 1995, Rio de Janeiro. **Anais...** Rio de Janeiro: Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 1995, p. 117-133.

SANTOS, V. M. P. dos. **Matemática:** conhecimento, concepções e consciência metacognitiva de professores em formação e em exercício. INEP Série Documental: Eventos, n. 4, 2ª parte, abr./1994, p. 1-20.

SANTOS, V. M. P. dos; REZENDE, J. F. (Coord.). **Números:** linguagem universal. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, 1996.

SANTOS-WAGNER, V. M. Resolução de problemas em matemática: uma abordagem no processo educativo. **Boletim GEPEM**, Rio de Janeiro, n. 53, p. 43-74, 2008.

SILVA, W. R. da. **O ensino de matemática na escola pública:** uma (inter)invenção pedagógica no 7º ano com o conceito de fração. 2011. 260 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2011.

TALL, D.; VINNER, S. Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. **Educational Studies in Mathematics**, v. 12, p. 151-169, 1981.

TALL, D.; VINNER, S. Concept image and concept definition. **Senior Secondary Mathematics Education**, n. 1983, p. 37-41, 1988.

TALL, D.; VINNER, S. The psychology of the advanced mathematical thinking. In: TALL, David (org.). **Advanced mathematical thinking**. New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow: Kluwer Academic Publishers, 2002. p. 3-21.

TOLEDO, M. B. A.; TOLEDO, M. A. **Teoria e prática de matemática:** como dois e dois, volume único. 1. ed. São Paulo: FTD, 2009.

VINNER, S. **Concept definition, concept image and the notion of function**. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, v. 14, n. 3, p. 293-305, 1983.

VINNER, S. The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In: TALL, D. (org.). **Advanced mathematical thinking**. New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow: Kluwer Academic Publishers, 2002, p. 65-81.

VINNER, S; DREYFUS, T. Images and definitions for the concept of function. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 20, n. 4, p. 356-366, 1989.

ZANON, T. X. D. **Imagens conceituais de combinatória no ensino superior de matemática**. 2019. 332 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Educação, Vitória, 2019.

APÊNDICE A – PRODUTO FINAL

GUIA DIDÁTICO

ENSINO E APRENDIZAGEM NA PERSPECTIVA DA
ANÁLISE DE IMAGENS CONCEITUAIS SOBRE
FRAÇÕES EQUIVALENTES



ALEKSANDER DE SOUZA MINGUTA

SÃO MATEUS

2021

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO	2
O QUE SÃO IMAGENS CONCEITUAIS?	3
IMAGENS CONCEITUAIS NA PRÁTICA	4
SUGESTÕES DE ATIVIDADES	6
REFERÊNCIAS	11

APRESENTAÇÃO

Este *Guia Didático* é fruto de uma pesquisa realizada no Programa de Mestrado Profissional em Ciência, Tecnologia e Educação da Faculdade Vale do Cricaré (FVC). Trata-se do produto final dessa pesquisa, um dos seus objetivos, e compõe a dissertação produzida como requisito para obtenção do título de Mestre em Ciência, Tecnologia e Educação.

Ideias de pesquisadores como David Tall, Shlomo Vinner e Thiarla Zanon acerca de *imagens conceituais* nos impulsionaram a investigar imagens conceituais sobre *frações equivalentes*. Assim, empreendemos a pesquisa na qual analisamos imagens conceituais evocadas por estudantes do 7º ano do ensino fundamental ao resolverem *atividades* sobre esse tópico matemático.

Apesar de sua grande importância tanto no contexto matemático como no cotidiano, *frações* ainda é um dos assuntos onde os alunos mais enfrentam dificuldades no ensino fundamental, com o conceito de equivalência desempenhando papel central em relação aos números fracionários.

Conhecer as imagens conceituais dos nossos alunos torna-se uma importante ferramenta na prática docente, podendo promover importantes melhorias no ensino e na aprendizagem de frações, frações equivalentes e de qualquer outro tópico matemático.

Na pesquisa que desenvolvemos, as *atividades*, especificamente selecionadas com a finalidade de favorecer o desvelar e análise de imagens conceituais, se mostraram fundamentais para os resultados obtidos.

Dessa forma, apresentamos neste guia algumas sugestões e orientações a respeito de como o professor, em sua prática, pode selecionar e utilizar atividades matemáticas sobre frações equivalentes com o objetivo de analisar imagens conceituais de seus alunos sobre esse tema.

Professor, que este material seja útil em sua prática e que, a partir disso, a qualidade do ensino e aprendizagem sobre frações equivalentes seja cada vez melhor.

Boa leitura!

Aleksander de Souza Minguta

O QUE SÃO IMAGENS CONCEITUAIS?

Segundo Tall e Vinner (1981), *imagens conceituais* são estruturas cognitivas relacionadas a um conceito matemático, compostas de:

- (i) imagens mentais
- (ii) propriedades e
- (iii) processos.

Essa estrutura se constrói ao longo dos anos por meio de experiências variadas, podendo mudar por conta de novos estímulos que um indivíduo possa receber. As imagens conceituais são individuais e dependem da pessoa e do assunto tratado.

Vinner (1983) esclarece que *imagens mentais* estão relacionadas a representações visuais sobre determinado conceito, como gráficos, símbolos, diagramas, imagens ou outras representações.

Já sobre *propriedades*, Zanon (2019) explica que são “[...] todos os atributos que caracterizam determinado conceito, sejam conscientes, sejam inconscientes [...]” (ZANON, 2019, p. 91).

E, sobre *processos*, Zanon (2019, p. 91) designa como sendo

uma possível articulação entre imagens e propriedades que podem ser externalizadas mediante uma representação. Acredita-se que, ao indagar uma pessoa, dela é exigida uma resposta que geralmente é dada pela articulação simultânea de imagens e propriedades. Desse modo, evoca-se uma imagem que busca responder às coisas (questões, tarefas, entre outros).

Devido ao processo de seu desenvolvimento que leva em conta diversos estímulos, as imagens conceituais, em um determinado momento, podem ser coerentes ou incoerentes, entendendo-se por imagens conceituais coerentes “[...] aquelas que mais se aproximam do conhecimento matemático formal. Do contrário, referem-se a imagens conceituais incoerentes [...]” (ZANON, 2019, p. 93).

IMAGENS CONCEITUAIS NA PRÁTICA

Ter acesso e conhecer as imagens conceituais dos nossos alunos nos permite verificar como se desenvolvem os conceitos em cada um deles possibilitando-nos pensar em formas de ensino, aprendizagem e avaliação que se ajustem às necessidades observadas.

Por exemplo, uma imagem conceitual equivocada acerca de um determinado assunto pode nos ajudar a compreender os motivos que levaram nosso aluno a agir como agiu e, assim, pensar em estratégias para melhorias no ensino que possivelmente formou tal imagem.

Em relação às frações equivalentes, ao desvelar e analisar imagens conceituais dos alunos, podemos compreender melhor as estratégias utilizadas por eles para lidar com o assunto e, diante disso, refletir e propor alternativas ao processo de ensino e aprendizagem.

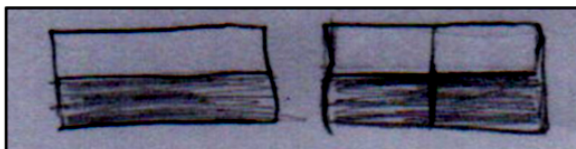
Para isso, a seleção de atividades deve levar em conta o seu potencial em desvelar imagens conceituais sobre equivalência de frações tendo em vista características associadas a esse assunto como sua definição e propriedades e procedimentos relacionados à obtenção e verificação de frações equivalentes, comparação, ordenação, adição e subtração de frações.

Quando se almeja acessar imagens conceituais dos estudantes, problemas e atividades específicas que solicitem uma explicação a respeito de como eles pensaram suas respostas, justificativas, como compreendem e conclusões a respeito do que foi feito, tendem a ser mais interessantes que atividades onde se requer apenas a aplicação de procedimentos de cálculo.

Dessa forma, ao resolverem atividades específicas para obtenção de imagens conceituais, as respostas registradas serão passíveis de análise buscando em expressões, esquemas, desenhos ou qualquer outra representação, elementos que apontem para imagens conceituais associadas ou não à equivalência de frações.

Por exemplo, vejamos as respostas apresentadas por um estudante quando questionado sobre o que são frações equivalentes para ele e o que se recorda sobre esse assunto. Em seguida, uma breve análise em relação as imagens conceituais evocadas nas respostas.

“frações que representam a mesma porção de espaço”



Fonte: Acervo do autor.

A resposta apresentada, especialmente devido ao trecho destacado, possui grande proximidade com a definição formal de frações equivalentes proposta por Giovanni Júnior e Castrucci (2018a, p. 142), “duas ou mais frações que representam a mesma porção da unidade são chamadas de frações equivalentes”, o que aponta para a existência de uma imagem conceitual sobre a definição de frações equivalentes.

Já os desenhos ilustram a noção que estudante possui sobre frações equivalentes e também apontam para uma possível imagem conceitual da definição do conceito de equivalência por estar diretamente relacionada a ela.

O estudante representou geometricamente duas frações que são equivalentes, tendo em vista que a porção pintada (a área) é igual em ambos os retângulos. Ou seja, de forma coerente, ele formulou uma definição muito próxima da formal e a exemplificou aplicando a figuras geométricas.

A explicação escrita e a opção por um esquema em forma de desenho conforme apresentado sugerem a influência do significado de fração como parte de um todo, apontando a existência de uma imagem conceitual relacionada e originada no processo de ensino e aprendizagem sobre frações, onde normalmente esse significado recebe maior ênfase em relação aos demais.

As respostas apresentadas foram obtidas por meio de um teste aplicado à estudantes do 7º ano antes das aulas sobre frações equivalentes, visando obter imagens conceituais iniciais baseadas em conhecimentos prévios obtidos em anos anteriores.

SUGESTÕES DE ATIVIDADES

Apresentamos a seguir algumas atividades sobre frações equivalentes que possuem características úteis para serem aplicadas com o intuito de desvelar imagens conceituais dos estudantes. Atividades como essas podem ser encontradas em livros didáticos, adaptadas ou mesmo elaboradas pelo próprio professor, de preferência sendo contextualizadas com temas cotidianos e relacionados à realidade do estudante.

Além de possibilitarem registros escritos contendo informações interessantes, essas atividades também podem produzir registros orais em aulas baseadas em discussões coletivas que ofereçam dados importantes para a investigação de imagens conceituais.

Em relação aos estudantes, as atividades sugeridas objetivam levá-los a:

- Compreender que duas ou mais frações são equivalentes quando representam a mesma porção da unidade; reconhecer frações equivalentes como formas distintas de representar uma mesma quantidade; identificar frações equivalentes; obter frações equivalentes a uma fração dada.
- Comparar e ordenar números racionais representados na forma fracionária em diferentes contextos.
- Resolver problemas que envolvam adição e/ou subtração de números racionais representados na forma fracionária.

1. Observe as barras a seguir.



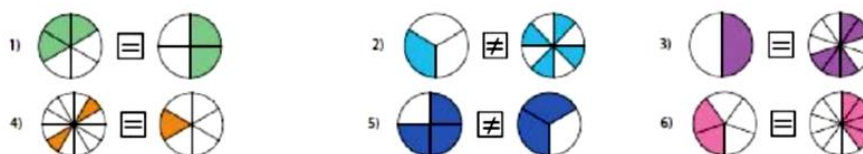
a) Escreva a fração que representa as partes coloridas de cada barra.

Resposta esperada: $2/3$, $4/6$, $8/12$.

b) Podemos afirmar que essas frações são equivalentes? Explique por quê.

Resposta esperada: Sim, pois indicam quantidades iguais de área pintada.

2. Escreva = entre os círculos abaixo quando as partes coloridas representarem frações equivalentes e \neq quando não forem equivalentes. Explique suas respostas.



Comentário: Nessa atividade diversas estratégias de resolução podem surgir. Dentre elas, a mais esperada é aquela em que os estudantes chegam a uma conclusão pela comparação das áreas pintadas em cada círculo e verificam se são iguais ou não. O professor deve deixar claro que os círculos são iguais e que importa a comparação a quantidade de área pintada em relação ao círculo todo e não a comparação da quantidade de pedaços. É importante aproveitar a discussão em torno das estratégias que surgirem para explorar o pensamento dos estudantes sobre o assunto e assim obter imagens conceituais de qualidade.

3. Para encontrar uma fração equivalente a outra, podemos multiplicar ou dividir o numerador e o denominador da fração por um mesmo número que seja diferente de zero.

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{c} \times 2 \\ \uparrow \\ \frac{1}{2} = \frac{2}{4} \\ \downarrow \\ \times 2 \end{array} & \begin{array}{c} \div 2 \\ \uparrow \\ \frac{4}{8} = \frac{2}{4} \\ \downarrow \\ \div 2 \end{array} \end{array}$$

Utilizando esse raciocínio, qual é a fração equivalente a:

- a) $\frac{3}{4}$ com denominador 28? **21/28** c) $\frac{3}{15}$ com numerador 1? **1/5**
 b) $\frac{6}{9}$ com denominador 3? **2/3** d) $\frac{4}{5}$ com numerador 12? **12/15**

Comentário: O professor pode aproveitar a abordagem dessa atividade e fazer uma ligação com a atividade anterior, conduzindo os estudantes a perceberem que essa propriedade pode ser aplicada na comparação das quantidades pintadas nas figuras, facilitando a tarefa e produzindo conclusões precisas.

4. Das frações abaixo, quais são equivalentes a fração representada pelas partes pintadas na figura?



- a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{9}{12}$ d) $\frac{2}{8}$

Explique por que você escolheu essas frações.

Respostas esperadas: Espera-se que os estudantes observem que as partes pintadas no desenho podem ser representadas pela fração $\frac{6}{8}$. Dessa fração, os estudantes podem obter as frações $\frac{3}{4}$ e $\frac{9}{12}$ usando a propriedade: dividindo os termos de $\frac{6}{8}$ por 2 para obter $\frac{3}{4}$ e, em seguida, multiplicar os termos de $\frac{3}{4}$ por 3 para obter $\frac{9}{12}$.

Outra estratégia comum que pode surgir é apresentarem desenhos para cada fração presente nos itens e comparar com o desenho dado.

5. Verifique se os pares de frações abaixo são equivalentes ou não, considerando que representam partes de um mesmo inteiro. Mostre como chegou em suas respostas.

a) $\frac{2}{7}$ e $\frac{6}{21}$ **Sim**

c) $\frac{3}{10}$ e $\frac{21}{70}$ **Sim**

e) $\frac{16}{10}$ e $\frac{8}{5}$ **Sim**

Resposta esperada: Em cada item, espera-se que os estudantes justifiquem suas respostas por meio da aplicação da propriedade usada para obtenção de frações equivalentes.

6. Utilizando frações equivalentes, reduza as frações a seguir ao mesmo denominador. Apresente os cálculos e procedimentos utilizados.

a) $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$ **2/4 e 1/4**

b) $\frac{4}{6}$ e $\frac{3}{4}$ **8/12 e 9/12**

c) $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{4}$ **4/12 e 6/12**

7. Em um treino de basquete, Marta, Jacqueline, Paula e Hortência jogaram a bola na cesta 12 vezes cada uma. Marta acertou 10 vezes; Jacqueline, 7 vezes; Paula, 8 vezes; e Hortência acertou todos os seus arremessos.

a) Quem acertou mais cestas? **Hortência**

b) Quem acertou menos cestas? **Jacqueline**

c) Escreva a fração que representa a quantidade de cestas certas, em relação aos 12 arremessos realizados por cada jogadora. **Marta: 10/12; Jacqueline: 7/12; Paula: 8/12; Hortência: 12/12.**

d) Utilizando os símbolos de igual a (=), maior que (>) ou menor (<), escreva essas frações em ordem decrescente. **12/12 > 10/12 > 8/12 > 7/12**

e) Observe as frações que você escreveu e responda: os denominadores são iguais ou diferentes? **Iguais**

f) A qual conclusão podemos chegar ao comparar frações com o mesmo denominador? **Resposta esperada: Quanto maior o numerador, maior será a fração.**

8. Manuela assou duas pizzas do mesmo tamanho para sua família, uma de calabresa e outra de muçarela. A pizza de calabresa foi dividida em 6 fatias iguais, e Manuela comeu duas fatias. A pizza de muçarela foi dividida em 4 partes iguais, e Manuela comeu uma delas. Com base nessas informações, responda às perguntas a seguir.

a) Que fração da pizza de calabresa Manuela comeu? **2/6**

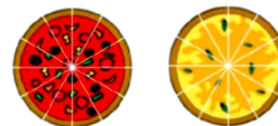
b) Que fração da pizza de muçarela Manuela comeu? **1/4**

c) Qual das pizzas foi cortada em pedaços maiores? **A de muçarela**



d) Como podemos saber se Manuela comeu mais pizza de calabresa ou mais pizza de muçarela? **Resposta esperada: Comparando as frações que representam a quantidade comida de cada pizza.**

e) Se as pizzas tivessem sido divididas em 12 pedaços, qual seria a fração equivalente aos pedaços de pizza de calabresa que Manuela comeu? E a fração equivalente ao pedaço de pizza de muçarela que ela comeu? **4/12. 3/12**



f) Compare as frações que você escreveu no item anterior. Qual é maior? **4/12**

g) Agora, compare as frações que você escreveu nos itens a e b. Qual é a maior? **2/6**

9. Compare as frações abaixo, utilizando os símbolos de igual (=), maior que (>) ou menor que (<).

$$a) \frac{4}{7} \text{ e } \frac{2}{7} >$$

$$b) \frac{3}{5} \text{ e } \frac{1}{2} >$$

$$c) \frac{1}{3} \text{ e } \frac{2}{6} =$$

Comentário: Espera-se que os estudantes percebam que, para se comparar frações com denominadores diferentes, é necessário primeiramente transformá-las em outras, equivalentes, que tenham denominadores iguais e, assim, realizar a comparação.

10. Compare as frações abaixo e escreva-as em ordem crescente.

$$\frac{3}{5} \quad \frac{1}{10} \quad \frac{4}{5} \quad \frac{9}{10} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{10}{10} \quad \frac{2}{10} \quad \frac{4}{10} \quad \frac{3}{10} \quad \frac{7}{10}$$

$$\frac{1}{10} < \frac{2}{10} < \frac{3}{10} < \frac{4}{10} < \frac{1}{2} < \frac{3}{5} < \frac{7}{10} < \frac{4}{5} < \frac{9}{10} < \frac{10}{10}$$

11. Júlia fez um bolo de chocolate para suas filhas, Karina e Natália. Karina comeu $\frac{2}{5}$ do bolo. Já Natália, comeu $\frac{1}{5}$. Que fração representa a quantidade de bolo Karina e Natália comeram juntas? Que fração do bolo sobrou? **Comeram $\frac{3}{5}$ do bolo. Sobrou $\frac{2}{5}$ do bolo.**

Comentário: Nas atividades 11, 12, 13, 14 e 15 os estudantes devem ser estimulados a procurarem estratégias diferentes para resolver os problemas, que podem ser inicialmente baseadas em desenhos e esquemas para posteriormente ser formalizada a resolução por meio de adição e subtração de frações. É importante que o professor seja o responsável por guiar a discussão a partir das ideias que forem surgindo diante das dificuldades encontradas, especialmente nos itens que tratam de frações que possuem denominadores diferentes. Nesses casos, espera-se que os estudantes percebam que frações nessas condições representam partes de objetos tomadas em tamanhos diferentes, o que torna a adição ou subtração direta impraticável. Assim, espera-se que os estudantes percebam que será necessário substituir as frações dadas por outras equivalentes, com denominadores iguais, para se proceder a adição e/ou subtração.

12. No primeiro dia de trabalho, Kauan pintou $\frac{1}{8}$ de uma parede e, no segundo dia, pintou $\frac{3}{8}$ da mesma parede. Que fração da parede ele pintou nos dois dias? Que fração da parede ainda falta ser pintada? **Ele pintou $\frac{4}{8}$ da parede. Ainda falta ser pintado $\frac{4}{8}$ da parede.**

13. Para fazer um trabalho escolar, Gustavo usou $\frac{1}{2}$ de uma folha de cartolina, enquanto sua irmã usou $\frac{1}{4}$ da mesma folha para fazer o trabalho dela. Que fração dessa folha os dois usaram juntos? Que fração da folha restou? **Usaram $\frac{3}{4}$ da folha. Resta $\frac{1}{4}$ da folha.**

14. Guilherme gastou $\frac{2}{4}$ do dinheiro que sua mãe lhe deu para comprar um sanduíche e $\frac{1}{3}$ para comprar um sorvete. Em relação ao dinheiro que ganhou, que fração representa a quantidade que Guilherme gastou? Que fração da quantidade de dinheiro ainda sobrou para Guilherme? **Ele gastou $\frac{10}{12}$ da quantia de dinheiro que recebeu. Sobrou $\frac{2}{12}$.**

15. Uma pesquisa sobre jogos eletrônicos feita com alunos do 7º ano da escola de Jaqueira mostrou que:

- $\frac{1}{4}$ dos alunos preferem jogar *Garena Free Fire*.
- $\frac{2}{3}$ dos alunos preferem jogar *PUBG*.
- O restante dos alunos não gosta de jogos eletrônicos.

Que fração representa a quantidade alunos que gostam de jogos eletrônicos? E qual fração representa a quantidade de alunos que não gostam de jogos eletrônicos? **$\frac{11}{12}$ dos alunos gostam de jogos eletrônicos. $\frac{1}{12}$ dos alunos não gosta.**

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, T. R. de. **Sistema de Ensino Aprende Brasil: matemática: 7º ano**. Curitiba: Aprende Brasil, 2019.

BERTONI, N. E. **Educação e Linguagem Matemática IV: Frações e Números Fracionários**. Brasília: Universidade de Brasília, 2009.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: primeiro e segundo ciclos: matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: terceiro e quarto ciclos: matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC): Educação é a Base**. Brasília, MEC/CONSED/UNDIME, 2017. Disponível em: <<http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/02/bncc-20dez-site.pdf>>. Acesso em: 19 dez. 2020.

GIOVANNI JR., J. R.; CASTRUCCI, B. **A conquista da matemática**, 6. São Paulo: FTD, 2018a.

MENDES, I. A. **Matemática e Investigação em sala de aula: tecendo redes cognitivas na aprendizagem**. 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

MERLINI, V. L. **O conceito de fração em seus diferentes significados: um estudo diagnóstico com alunos de 5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental**. 2005. 215 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

MINGUTA, A; ZANON, T. X. D. **Ações do futuro professor na condução de discussões matemáticas sobre frações equivalentes**. 2018. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Licenciatura em Matemática) - Instituto Federal do Espírito Santo, campus Cachoeiro de Itapemirim.

SANTOS-WAGNER, V. M. Resolução de problemas em matemática: uma abordagem no processo educativo. **Boletim GEPEN**, Rio de Janeiro, n. 53, p. 43-74, 2008.

TALL, D.; VINNER, S. Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. **Educational Studies in Mathematics**, v. 12, p. 151-169, 1981.

VINNER, S. **Concept definition, concept image and the notion of function**. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, v. 14, n. 3, p. 293-305, 1983.

ZANON, T. X. D. **Imagens conceituais de combinatória no ensino superior de matemática**. 2019. 332 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Educação, Vitória, 2019.

ANEXO A – TERMO DE AUTORIZAÇÃO DA INSTITUIÇÃO COPARTICIPANTE



PREFEITURA MUNICIPAL DE PRESIDENTE KENNEDY
 EMEIEF DE JAQUEIRA BERY BARRETO DE ARAUJO
 ATO DE CRIAÇÃO POR RES. Nº 273/ED. INFANTIL/PRE ESCOLA
 ATO DE APROVAÇÃO RES. DO C.E.E. Nº 411/ED. Nº 131/AD 9
 ATO DE APROVAÇÃO RES. DO C.E.E. Nº 2735/DE 09/2019/AD 9

**PREFEITURA MUNICIPAL DE PRESIDENTE KENNEDY
 SECRETARIA MUNICIPAL DE EDUCAÇÃO
 EMEIEF DE JAQUEIRA “BERY BARRETO DE ARAUJO”**

TERMO DE AUTORIZAÇÃO DA INSTITUIÇÃO COPARTICIPANTE

Eu, Fabíula de Carvalho Barreto, ocupante do cargo de Diretora Escolar na EMEIEF de Jaqueira “Bery Barreto de Araújo”, autorizo a realização nesta instituição a pesquisa “Imagens conceituais sobre frações equivalentes no ensino fundamental: uma contribuição ao ensino e à aprendizagem”, sob a responsabilidade do pesquisador Aleksander de Souza Minguta, tendo como objetivo primário (geral) analisar as imagens conceituais evocadas, durante a resolução de atividades sobre equivalência de frações, por estudantes do 7º ano do ensino fundamental de uma escola municipal de Presidente Kennedy/ES.

Afirmo que fui devidamente orientado sobre a finalidade e objetivos da pesquisa, bem como sobre a utilização de dados exclusivamente para fins científicos e que as informações a serem oferecidas para o pesquisador serão guardadas pelo tempo que determinar a legislação e não serão utilizadas em prejuízo desta instituição e/ou das pessoas envolvidas, inclusive na forma de danos à estima, prestígio e/ou prejuízo econômico e/ou financeiro. Além disso, durante ou depois da pesquisa é garantido o anonimato dos sujeitos e sigilo das informações.

Esta instituição está ciente de suas corresponsabilidades como instituição coparticipante do presente projeto de pesquisa, e de seu compromisso no resguardo da segurança e bem-estar dos participantes da pesquisa nela recrutados, dispondo da infraestrutura necessária para tal.

Presidente Kennedy, 02 de Julho de 2021.

Assinatura do responsável e carimbo e ou CNPJ da instituição coparticipante

Fabiula de Carvalho Barreto
 Diretora Escolar
 DECRETO Nº 00547/2019

ANEXO B – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (TCLE) – RESPONSÁVEL LEGAL

O menor de idade pelo qual o(a) senhor(a) é responsável está sendo convidado(a) a participar como voluntário(a), do estudo/pesquisa intitulado(a) “Imagens conceituais sobre frações equivalentes no ensino fundamental: uma contribuição ao ensino e à aprendizagem”, conduzida por Aleksander de Souza Minguta sob orientação do Prof. Dr. Joccitel Dias da Silva. Este estudo tem por objetivo geral (primário) analisar as imagens conceituais evocadas, durante a resolução de atividades sobre equivalência de frações, por estudantes do 7º ano do ensino fundamental de uma escola municipal de Presidente Kennedy/ES. Como objetivos específicos (secundários), almeja-se identificar as imagens conceituais iniciais sobre frações equivalentes apresentadas pelos estudantes na resolução de atividades sobre o conteúdo; verificar como essas imagens conceituais iniciais apresentadas pelos estudantes se modificam ou não durante a realização das atividades sobre frações equivalentes; e produzir um guia didático com orientações e sugestões de atividades para o ensino e para a aprendizagem de frações equivalentes a partir do trabalho com imagens conceituais.

A participação nesta pesquisa do menor de idade pelo qual o(a) senhor(a) é responsável consistirá, numa primeira etapa, na realização de uma lista atividades sobre frações equivalentes, especificamente selecionadas por possuírem características que favorecem o desvelar de imagens conceituais sobre o conteúdo ao serem resolvidas pelos estudantes. Essas atividades serão entregues ao participante da pesquisa em sua residência, por meio das apostilas que são entregues pela escola mensalmente com as APNPs (atividades pedagógicas não presenciais). O propósito deste primeiro momento da pesquisa é avaliar os conhecimentos prévios dos estudantes sobre frações equivalentes para compreender em que estágio se encontra a aprendizagem deles quanto a esse conteúdo matemático, analisando as imagens conceituais iniciais apresentadas pelos estudantes sobre o conteúdo, a partir das respostas dadas às atividades.

Num segundo momento, o menor de idade pelo qual o(a) senhor(a) é responsável participará de oficinas sobre frações equivalentes a serem desenvolvidas por meio de videoconferências, via aplicativo Google Meet, por conta da suspensão das aulas presenciais devido à pandemia do COVID-19. Nesses encontros virtuais, os estudantes realizarão um conjunto de atividades sobre frações equivalentes. Os registros produzidos pelos estudantes nessas atividades serão analisados a fim de se verificar como as imagens conceituais iniciais apresentadas por eles se modificaram (ou não) durante a realização das atividades. Essas oficinas serão gravadas e as gravações serão utilizadas como instrumento de coleta de informações para análise dos diálogos presentes no transcorrer das oficinas, podendo contribuir para a identificação de imagens conceituais sobre frações equivalentes. Assim, serão analisadas as respostas dos participantes da pesquisa ao longo e ao final das oficinas, do ponto de vista das imagens conceituais apresentadas, comparando-as com

aquelas previamente obtidas na primeira etapa. Essa comparação visa verificar a movimentação das imagens conceituais mediante a realização das atividades sobre frações equivalentes nas aulas remotas. Por fim, a partir das análises realizadas, serão apresentados e discutidos os resultados encontrados, que darão suporte para a confecção do produto final da pesquisa.

O menor de idade pelo qual o(a) senhor(a) é responsável foi selecionado para participar da presente pesquisa tendo em vista fazer parte de uma das turmas do 7º ano do ensino fundamental da EMEIEF de Jaqueira “Bery Barreto de Araújo”, nas quais o professor-pesquisador mencionado anteriormente atua como professor regente de matemática. A participação do menor não é obrigatória. A qualquer momento, ele poderá desistir de participar e você poderá retirar seu consentimento. Sua recusa, desistência ou retirada de consentimento não acarretará prejuízo.

Como risco gerado por esta pesquisa pode ocorrer a perda de dados obtidos por meio dos registros produzidos pelos participantes da pesquisa durante as atividades descritas anteriormente, o que será minimizado pelo uso de nomes fictícios pelos participantes da pesquisa. Assim, os nomes utilizados serão pseudônimos, buscando assim resguardar a identidade dos participantes. Além disso, os dados obtidos por meio desta pesquisa serão confidenciais e não serão divulgados em nível individual, visando assegurar o sigilo da participação.

Dentre os benefícios provenientes desta pesquisa, pode-se destacar: a aproximação do professor em relação aos conhecimentos do aluno; o reconhecimento das estratégias mobilizadas pelos alunos em atividades matemáticas sobre frações equivalentes; a valorização do aluno e o estímulo à sua participação e exposição de ideias; o aprimoramento do planejamento e desenvolvimento das aulas, bem como da avaliação da aprendizagem, pelo professor em sua prática docente; a produção de conhecimentos como contribuição à pesquisa em Educação Matemática sobre o tema pesquisado.

A participação nesta pesquisa por parte do menor de idade pelo qual o(a) senhor(a) é responsável não será remunerada nem implicará em gastos para os participantes; haverá ressarcimento para eventuais despesas de participação, tais como: transporte e alimentação, etc.; indenização: cobertura material para reparação a dano, causado pela pesquisa ao participante da pesquisa.

O(s) pesquisador(es) responsável(is) se compromete(m) a tornar públicos nos meios acadêmicos e científicos os resultados obtidos de forma consolidada sem qualquer identificação de indivíduos participantes.

Caso você concorde que o menor de idade pelo qual o(a) senhor(a) é responsável participe desta pesquisa, assine ao final deste documento, que possui duas vias, sendo uma delas sua, e a outra, do pesquisador responsável / coordenador da pesquisa.

Eu declaro ter conhecimento das informações contidas neste documento e ter recebido respostas claras às minhas questões a propósito da participação direta (ou indireta) do menor de idade pelo qual sou responsável na pesquisa e, adicionalmente, declaro ter compreendido o objetivo, a natureza, os riscos e benefícios deste estudo. Após reflexão e um tempo razoável, eu decidi, livre e voluntariamente, autorizar a

participação do menor de idade pelo qual sou responsável a participar deste estudo. Estou consciente que ele pode deixar o projeto a qualquer momento, sem nenhum prejuízo.

Nome completo: _____

RG: _____ Data de Nascimento: ___/___/___ Telefone: _____

Endereço: _____

CEP: _____ Cidade: _____ Estado: _____

Assinatura: _____ Data: ___/___/___

(responsável legal)

Eu declaro ter apresentado o estudo, explicado seus objetivos, natureza, riscos e benefícios e ter respondido da melhor forma possível às questões formuladas.

Assinatura pesquisador: _____

(ou seu representante)

Data: ___/___/___

Nome completo: _____

Para todas as questões relativas ao estudo ou para se retirar do mesmo, poderão se comunicar com Aleksander de Souza Minguta via e-mail: alesouzaming2014@live.com ou telefone: (28) 99967-5041.

Em caso de dúvidas com respeito aos aspectos éticos deste estudo, você poderá consultar:

CEP – Comitê de ética em Pesquisa – FVC

São Mateus (ES) – CEP: 29933-415

Fone: (27) 3313-0028 / E-mail: cep@ivc.br

PESQUISADOR(A) RESPONSÁVEL: Aleksander de Souza Minguta

ENDEREÇO: Rua Walter Brito, 213 – Campo Acima

Itapemirim (ES) – CEP: 29330-000

Fone: (28) 99967-5041 / E-mail: alesouzaming2014@live.com

ANEXO C – TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Você está sendo convidado(a) como voluntário(a) a participar da pesquisa “Imagens conceituais sobre frações equivalentes no ensino fundamental: uma contribuição ao ensino e à aprendizagem”, que tem como objetivos primário (geral) analisar as imagens conceituais evocadas, durante a resolução de atividades sobre equivalência de frações, por estudantes do 7º ano do ensino fundamental de uma escola municipal de Presidente Kennedy/ES. E como objetivos específicos (secundários), almeja-se identificar as imagens conceituais iniciais sobre frações equivalentes apresentadas pelos estudantes na resolução de atividades sobre o conteúdo; verificar como essas imagens conceituais iniciais apresentadas pelos estudantes se modificam ou não durante a realização das atividades sobre frações equivalentes; e produzir um guia didático com orientações e sugestões de atividades para o ensino e para a aprendizagem de frações equivalentes a partir do trabalho com imagens conceituais.

O motivo que nos leva a estudar esse assunto é a importância das frações tanto em fazer parte da vida cotidiana quanto para a ciência, estando contido nos currículos dos sistemas educacionais desde os primeiros anos da escolaridade. Contudo, apesar de toda relevância e, conseqüentemente, necessidade de haver boa compreensão, encontrou-se um cenário onde o tema frações é apontado por diversos autores, pesquisas e documentos oficiais como um dos tópicos matemáticos em que os estudantes do ensino fundamental mais enfrentam problemas na aprendizagem. Nesse estudo, a escolha por desvelar e analisar imagens conceituais de alunos sobre o conceito de equivalência de frações se dá pela possibilidade de essa análise ajudar a compreender melhor as estratégias utilizadas para lidar com as frações equivalentes e, diante disso, refletir e propor alternativas ao processo de ensino e aprendizagem.

Para este estudo serão abordados os seguintes procedimentos: numa primeira etapa, os participantes da pesquisa realização de uma lista atividades sobre frações equivalentes, especificamente selecionadas por possuírem características que favorecem o desvelar de imagens conceituais sobre o conteúdo ao serem resolvidas pelos estudantes. Essas atividades serão entregues aos participantes da pesquisa em suas respectivas residências, por meio das apostilas que são entregues pela escola mensalmente com as APNPs (atividades pedagógicas não presenciais). O propósito deste primeiro momento da pesquisa é avaliar os conhecimentos prévios dos estudantes sobre frações equivalentes para compreender em que estágio se encontra a aprendizagem deles quanto a esse conteúdo matemático, analisando as imagens conceituais iniciais apresentadas pelos estudantes sobre o conteúdo, a partir das respostas dadas às atividades.

Num segundo momento, os participantes da pesquisa participarão de oficinas sobre frações equivalentes a serem desenvolvidas por meio de videoconferências, via aplicativo Google Meet, por conta da suspensão das aulas presenciais devido à pandemia do COVID-19. Nesses encontros virtuais, os estudantes realizarão um conjunto de atividades sobre frações equivalentes. Os registros produzidos pelos

estudantes nessas atividades serão analisados a fim de se verificar como as imagens conceituais iniciais apresentadas por eles se modificaram (ou não) durante a realização das atividades. Essas oficinas serão gravadas e as gravações serão utilizadas como instrumento de coleta de informações para análise dos diálogos presentes no transcorrer das oficinas, podendo contribuir para a identificação de imagens conceituais sobre frações equivalentes. Assim, serão analisadas as respostas dos participantes da pesquisa da pesquisa ao longo e ao final das oficinas, do ponto de vista das imagens conceituais apresentadas, comparando-as com aquelas previamente obtidas na primeira etapa. Essa comparação visa verificar a movimentação das imagens conceituais mediante a realização das atividades sobre frações equivalentes nas aulas remotas. Por fim, a partir das análises realizadas, serão apresentados e discutidos os resultados encontrados, que darão suporte para a confecção do produto final da pesquisa.

Para participar deste estudo, o responsável por você deverá autorizar e assinar o TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (TCLE). Você não terá nenhum custo, nem receberá qualquer vantagem financeira. Você será esclarecido(a) em qualquer aspecto que desejar e estará livre para participar ou recusar-se. O responsável por você poderá retirar o consentimento ou interromper a sua participação a qualquer momento. A sua participação é voluntária e a recusa em participar não acarretará qualquer penalidade ou modificação na forma em que é atendido(a) pelo pesquisador que irá tratar a sua identidade com padrões profissionais de sigilo. Você não será identificado em nenhuma publicação.

Este estudo apresenta os seguintes riscos e benefícios para você: dentre os riscos, pode ocorrer a perda de dados obtidos por meio dos registros produzidos pelos participantes da pesquisa durante as atividades descritas anteriormente, o que será minimizado pelo uso de nomes fictícios pelos participantes da pesquisa. Assim, os nomes utilizados serão pseudônimos, buscando assim resguardar a identidade dos participantes. Além disso, os dados obtidos por meio desta pesquisa serão confidenciais e não serão divulgados em nível individual, visando assegurar o sigilo da participação.

Dentre os benefícios provenientes desta pesquisa, pode-se destacar: a aproximação do professor em relação aos conhecimentos do aluno; o reconhecimento das estratégias mobilizadas pelos alunos em atividades matemáticas sobre frações equivalentes; a valorização do aluno e o estímulo à sua participação e exposição de ideias; o aprimoramento do planejamento e desenvolvimento das aulas, bem como da avaliação da aprendizagem, pelo professor em sua prática docente; a produção de conhecimentos como contribuição à pesquisa em Educação Matemática sobre o tema pesquisado.

Você tem assegurado o direito a ressarcimento ou indenização no caso de quaisquer danos eventualmente produzidos pela pesquisa.

Os resultados estarão à sua disposição quando a pesquisa for finalizada. Seu nome ou o material que indique sua participação não será liberado sem a permissão do responsável por você. Os dados e instrumentos utilizados na pesquisa ficarão arquivados com o pesquisador responsável por um período de 5 anos, e após esse

tempo serão destruídos. Este Termo de Assentimento encontra-se impresso em duas vias, sendo que uma cópia será arquivada pelo pesquisador responsável, e a outra será fornecida a você.

Eu, _____, fui informado(a) dos objetivos do presente estudo de maneira clara e detalhada e minhas dúvidas foram esclarecidas. Sei que a qualquer momento poderei solicitar novas informações, e o meu responsável poderá modificar a decisão de participar se assim o desejar. Tendo o consentimento do meu responsável já assinado, declaro que concordo em participar desse estudo. Recebi uma cópia deste Termo de Assentimento e me foi dada a oportunidade de ler e esclarecer as minhas dúvidas. Este termo possui duas vias de igual teor onde uma ficará com o pesquisando e outra com o pesquisador.

Em caso de dúvidas com respeito aos aspectos éticos deste estudo, você poderá consultar:

CEP – Comitê de ética em Pesquisa – FVC
São Mateus (ES) - CEP: 29933-415
Fone: (27) 3313-0028 / E-mail: cep@ivc.br

PESQUISADOR(A) RESPONSÁVEL: Aleksander de Souza Minguta
ENDEREÇO: Rua Walter Brito, 213 – Campo Acima

Itapemirim (ES) – CEP: 29330-000
Fone: (28) 99967-5041 / E-mail: alesouzaming2014@live.com

Presidente Kennedy, ES, ____ de _____ de 2021

Nome e assinatura do(a) participante


Nome e assinatura do(s) pesquisador(es)


ANEXO D – PÁGINA DA PLATAFORMA BRASIL COM DADOS DA VERSÃO DO PROJETO DE PESQUISA APROVADO

DETALHAR PROJETO DE PESQUISA

- DADOS DA VERSÃO DO PROJETO DE PESQUISA

Título da Pesquisa: IMAGENS CONCEITUAIS SOBRE FRAÇÕES EQUIVALENTES NO ENSINO FUNDAMENTAL: UMA CONTRIBUIÇÃO AO ENSINO E À APRENDIZAGEM
Pesquisador Responsável: ALEKSANDER DE SOUZA MINGUTA
Área Temática:
Versão: 1
CAAE: 49457021.8.0000.8207
Submetido em: 02/07/2021
Instituição Proponente: INSTITUTO VALE DO CRICARE LTDA
Situação da Versão do Projeto: Aprovado
Localização atual da Versão do Projeto: Pesquisador Responsável
Patrocinador Principal: Financiamento Próprio



Comprovante de Recepção:  PB_COMPROVANTE_RECEPCAO_1749187

+ DOCUMENTOS DO PROJETO DE PESQUISA

+ LISTA DE APRECIACÕES DO PROJETO

+ HISTÓRICO DE TRÂMITES

LEGENDA:

(*) **Apreciação**

PO = Projeto Original de Centro Coordenador	POp = Projeto Original de Centro Participante	POc = Projeto Original de Centro Coparticipante
E = Emenda de Centro Coordenador	Ep = Emenda de Centro Participante	Ec = Emenda de Centro Coparticipante
N = Notificação de Centro Coordenador	Np = Notificação de Centro Participante	Nc = Notificação de Centro Coparticipante

Fonte: Plataforma Brasil (2021).